ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
106

For Senior & Graduate Courses

ホログラフィー原理と量子エンタングルメント

◆

高柳 匡 著



サイエンス社

SGC ライブラリ-106

ホログラフィー原理と量子エンタングルメント

高柳 匡 著

サイエンス社

まえがき

本書は量子エンタングルメントという視点で，量子多体系の理論（場の理論）と重力理論（一般相対性理論や超弦理論）という一見全く異なった物理の理論体系を統一的に理解する新しい考え方を説明することを主目的としている．この考え方は，ホログラフィー原理と呼ばれ，特別な場合はAdS/CFT対応ないしゲージ・重力対応とも呼ばれる．ホログラフィー原理の内容を誤解を恐れず一言でまとめると,「量子多体系の理論を時空の幾何学として表現する手法」と言える．場の理論は素粒子理論と物性理論の両分野にまたがる基本的で大変重要な道具であるが，ホログラフィー原理は理論物理学のほぼすべての分野の理論体系は実はその根源において同一であるという驚くべき関係性を強く示唆する．

ホログラフィー原理やAdS/CFT対応は超弦理論の分野で発見された考え方であり，最近の超弦理論の研究において最もアクティブに研究されているテーマと言える．しかしながら，本書は読むのに超弦理論の知識は必要としないように書いたつもりである．本書で想定している読者は理論物理を専門とする修士課程の大学院生程度であるが，場の理論の初歩と一般相対性理論の初歩を習得していれば，学部学生でも意欲があれば多くの部分を読みこなせるようになっている．

量子エンタングルメントは量子力学の基本的な性質であり，量子情報理論において極めて重要な役割を果たしてきた．その概念を定量化する量がエンタングルメント・エントロピーであり，本書で議論する最も重要な物理量である．この量を用いてホログラフィー原理を考察すると見通しが良くなり，多くの新しい知見が得られる．なぜならエンタングルメント・エントロピーは,「量子多体系の幾何学を記述する最も基本的な量」の一つといえるからである．本書の最終目標は，量子エンタングルメントの考え方を用いて「ホログラフィー原理とは一体何なのか？」を理解することにある．一方で，エンタングルメント・エントロピーは複雑な量子多体系を数値的に解析する際に大変便利な量であり，基底状態がどのような量子相にあるか識別する量子的秩序パラメーターとして活用されている．つまり,「数値実験における観測量」という側面も持っているのである．

量子エンタングルメントやエンタングルメント・エントロピーというキーワードが，素粒子理論や物性物理・量子多体系の研究者に研究対象として興味を持たれ，世界中で活発にこれらの分野で研究されるようになってからまだ10年も経過していない．その意味でも量子エンタングルメントの考え方は，21世紀の理論物理を牽引する原動力となりえると筆者は期待している．

本書の内容は，以下の通りである．第1章で歴史的背景を説明した後で，第2章でエンタングルメント・エントロピーの定義や性質を説明する．第3章から第4章まで，場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算法や具体例について述べる．第5章から第6章までにおいて，ホログラフィー原理やAdS/CFT対応の解説を行う．そして第7章から第10章まで，ホログラフィー原理を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算法や具体的計算，またその応用について説

明する．最後の第 11 章では，それまでの内容を総括するとともに，量子エンタングルメントを用いて重力理論の時空を記述する新しい考え方を紹介したい．

本書の全般的な内容に興味のある読者は，第 1 章から順に第 11 章まで順に読むことを基本的にお勧めする．時間が十分にないため，特に基本的で重要な部分だけをピックアップしたい読者には，[2.1–2.4 節]，[3.1–3.3 節]，[5.1–5.2 節]，[6.1–6.4 節]，[7.1–7.3 節] を読むことをお勧めする．また，場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算のみに興味がある読者は，第 2 章から第 4 章までを読んで頂きたい．一方，エンタングルメント・エントロピーのホログラフィックな計算にのみ興味がある読者は，第 5 章から第 11 章までを読んで頂ければよいように書かれている．

本書の第 7 章以降の多くの部分が筆者自身も関わった研究をもとにしており，また筆者が国内の集中講義（立教大・東北大・京都大基礎物理学研究所・東京工業大・北海道大など）や海外のスクール（CERN 冬の学校・Arnold Sommerfeld スクール・アジア冬の学校など）で行ってきた講義の経験を加味して書かせて頂いている．まず，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの計算法を共同で開発させて頂いた笠真生氏には心よりお礼を申し上げたい．さらに関連研究の共同研究者である，畔柳竜生氏，Jyotirmoy Bhattacharya 氏，初田泰之氏，Matthew Headrick 氏，平田朋義氏，Veronika Hubeny 氏，藤田充俊氏，Andreas Karch 氏，李微氏，Ali Mollabashi 氏，K. Narayan 氏，西岡辰磨氏，野崎雅弘氏，沼澤宙朗氏，小川軌明氏，Andrea Prudenziati 氏，Mukund Rangamani 氏，芝暢郎氏，Ethan Thompson 氏，Erik Tonni 氏，Sandip Trivedi 氏，宇賀神知紀氏の各氏に深く感謝したい．また作成中の原稿における多数の誤植やミスを指摘して頂いた京都大学の大学院生である岡崎智久氏，佐藤芳紀氏，渡邊賢人氏には非常に感謝している．最後に，本書に関して多数の助言を頂き，また辛抱強く原稿の完成を激励しながら見守っていただいたサイエンス社の平勢耕介氏に心から感謝の意を表したい．

2013 年 12 月　京都大学にて

高柳 匡

目　次

第 1 章
はじめに：歴史的背景から最近の流れまで

本書のはじめとして，ここでは何故**エンタングルメント・エントロピー** という量が理論物理学において興味をもたれるようになってきたのか説明したい．以下で説明するように，ブラックホールのエントロピーを動機の中心として，様々な歴史的な発展が交差や合流を繰り返してきた．そのせいで，流れは少々入り組んでいるが，理論物理学の発展の現実を伝えるために，歴史的な経緯を尊重して説明したいと思う．

1.1 歴史的動機：ブラックホールのエントロピー

現代の物理学において，量子力学（量子論）はミクロなスケールを記述するための唯一の基礎理論である．当然ながら物質の最小単位の解明を目指す素粒子理論においても最も根源的な原理であり，**場の理論** と呼ばれる多体系の量子力学を用いて素粒子理論を構成してきた．この考え方で，現実世界に存在する 4 つの力のうち電磁気力， 強い相互作用，そして弱い相互作用を統一的に理解することができ，この基礎理論がいわゆる「標準模型」である．しかしながら，4 つ目の力である**重力**（万有引力）は，我々の宇宙の形成や惑星の運動などを理解する上で欠かせない極めて重要な相互作用であるにもかかわらず，量子論との相性を考えるとやっかいな問題が歴史的にいくつも起ってきたのである．しかしながら物理学の進歩においては，そのような問題を解決しようとして大きなブレークスルーが生まれるのが常である．

まず，マクロなスケールの重力理論を完全に記述すると考えられている**一般相対性理論**を通常の手法で量子化すると，高エネルギー領域の量子揺らぎによって起こる発散（**紫外発散**と呼ばれる）が頻繁に生じるために，量子論として大きな困難が生じる．相対性理論において長さのスケールとエネルギーのスケールは逆比例する．従って，発散が生じる理由は物質の最小単位を粒子と考えているため，その大きさがゼロであることに起因していると思われる．そこで，

粒子ではなく空間的に広がった物体で構成されるような新しい量子論を考えればこの問題を解決できると期待される．そのように考えて，粒子ではなく空間1次元的に広がった**弦**（**ひも**）を基本的な構成要素と考えて，量子重力理論を構築したものが**超弦理論**である．現在，超弦理論は量子重力理論の最も有力な候補と考えられており，本書で重力理論を取り扱う場合も基本的に超弦理論の枠組みに従っている．

以上は，重力理論をミクロに見た場合であるが，一方，マクロに起こる重力現象に関してもミステリアスな現象が起こる．その最たる例が，**ブラックホール**であろう．一般相対性理論に従うと，非常に重くかつサイズが小さい天体を考えるとブラックホールが実現されるが，その中心付近では重力場が非常に強いので光ですら抜け出すことができない．従ってその内部を外の観測者が知ることはできない．統計力学では，識別できない情報の量を**エントロピー**で表すが，それにならってベッケンシュタインは，ブラックホールにはエントロピーがあることを予想した[1]．これを**ブラックホールのエントロピー**と呼ぶ．さらには，大変興味深いことにブラックホールには，温度も定義することができ[2]，熱力学の法則を満たすことが分かってきた[3]．これを**ブラックホール熱力学**と呼ぶ．例えば，ブラックホールのエントロピー S_{BH} は，次の有名な**ベッケンシュタイン・ホーキングの面積公式**で与えられる：

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4G_N \hbar} \cdot [\text{ブラックホールの表面積}]. \tag{1.1}$$

この公式は大変含蓄が深く，多くの素朴な疑問を引き起こす．まず，この式には様々な物理定数が現れている：重力定数（ニュートン定数）G_N，プランク定数 $\hbar$ そしてボルツマン定数 k_B．従って，この公式の真の理解に到達するには，重力理論，量子力学，統計力学を融合する必要がある．言い換えると量子重力理論が必要になるのである．本書の以下では，素粒子論などで通常用いられる**自然単位系**を使用し，$G_N = \hbar = k_B = c = 1$ と置くことにする．

また，ブラックホールのエントロピーが，表面積に比例するという事実も極めて不思議である．通常の熱力学では，気体，液体，固体どれでもエントロピーは体積に比例する（示量的である）．従って，ブラックホールは熱力学の法則に従うにもかかわらず，我々が知っている物質とは大変異なる性質を持っているように見える．このようにして,「ブラックホールの熱力学やエントロピーとは一体何なんだろうか？」という根本的な疑問が生じるのである．

1.2 ブラックホールとエンタングルメント・エントロピー

先ほど述べたように，ブラックホールのエントロピーはブラックホールの内部が見えないことに起因していると考えるのが自然である．つまりブラックホールの中に隠されている情報量を表していると考えられる．重力を忘れて純粋に

量子力学で考えてみると，量子系の一部が観測できない場合に生じるエントロピーは，**エンタングルメント・エントロピー**と呼ばれる[4],[5]．エンタングルメント・エントロピーは**量子エンタングルメント**の強さを表し，量子力学における情報量を定量化するものとして，量子情報理論において非常に重要な役割を果たしている[6]~[8]．

そこで，ブラックホールのエントロピーを理解する第一歩として，場の理論（場の量子論）においてエンタングルメント・エントロピーを計算する研究が1980年代後半頃から始まった[9]．球殻内の領域をブラックホールに見立て，Bと呼び，それ以外の空間をAと呼ぶことにする．このときBを観測できないと仮定してエンタングルメント・エントロピーを計算するのである．その結果，興味深いことに主要な寄与はBの表面積に比例することが分かり，**面積則**と呼ばれる．しかしながら，良く見るとブラックホールのエントロピーとは違う性質を持っていることが分かる．まず第一に，場の理論は自由度が無限に大きいのでエンタングルメント・エントロピーは発散してしまう．紫外カットオフを導入して有限化して計算することができるが，一方のブラックホールのエントロピーは明白に有限な量である．またさらに前者はどのような場（スカラー場やフェルミオン場など）に対して考えるかに依存し，またその場の個数に比例する．一方，後者ではエントロピーは(1.1)で与えられるように，ユニバーサルであり，場の種類などに依存しない．その後の研究で実は，エンタングルメント・エントロピーはブラックホールのエントロピーの量子補正と解釈できることが分かった[10],[11]．しかしながら，もともとのベッケンシュタイン・ホーキング公式(1.1)とエンタングルメント・エントロピーの関係を明らかにすることはできず，課題として残った．このような研究は，1990年代前半まで盛んに行われた．

同じ頃，トフーフトやサスキンドは**ホログラフィー原理**を提案した[12]．先ほど述べたようにブラックホールのエントロピーは表面積に比例するという一見不思議な性質を持っているが，それを逆に原理とみなして，重力理論の自由度は見かけより一次元低いという主張をした．その後さらに発展して，**「ある時空Mにおける重力理論は，その境界∂Mにおける（重力を含まない）場の理論と等価である」**というホログラフィー原理に行きついた．ブラックホールの例だと，その自由度はブラックホールの表面に住んでいるというのである．しかしながらその当時，この大胆な考え方はそれが本当に正しいことを検証できる具体例が非常に乏しかったため，興味深いアイデアの一つという扱いに過ぎなかった．

1.3 ブラックホールのエントロピーの微視的導出から AdS/CFT 対応へ

その後，1995 年にポルチンスキーによって超弦理論において **D ブレイン**が発見される [13] と超弦理論の様々な問題に関して数多くのブレークスルーをもたらした．その中でも特筆すべきものは，ストロミンジャーとバッファによる超対称ブラックホールのエントロピーのミクロな導出であろう [14]．D ブレインとは平たく言うと，非常に重く電荷を帯びた物体のことで，D ブレインを多数集めるとブラックホールになる．このようにして出来たブラックホールは，特殊な性質を持ち**超対称性**と呼ばれるボソンとフェルミオンを入れ替える対称性を有する．言い換えると，ブラックホールの持つ電荷とその質量が等しいという特別な状況になっている．D ブレインはエネルギーを与えると励起されて振動するが，このような振動を量子化してその状態数を計算することで，ブラックホールのエントロピーをミクロに導出し，(1.1) の公式と同じ結果になることが示されたのである．

この発見は，超弦理論が正しい量子重力理論となっているという証拠ともみなすことができ，この分野の研究が大いに盛り上がった．一方その影に隠れ，エンタングルメント・エントロピーを用いてブラックホールのエントロピーを説明しようというアイデアは忘れ去られた感が強くなった．しかしながら注意しておきたいことは，少なくとも現時点では D ブレインを用いた説明は，超対称性を有するなど特殊な状況に置かれたブラックホールに対してのみ有効であるということである．例えば，一般相対性理論の教科書で最初に勉強する平坦な時空のシュワルツシルド解に対しては D ブレインを用いた議論はほとんど役に立たないのである．

その数年後の 1997 年にマルダセナは，前述したブラックホールの D ブレインを用いた記述は，はるかに一般的な枠組みの特殊な一例にすぎないことに気がついた．この一般的な枠組みは **AdS/CFT 対応**と呼ばれる [15]．AdS は anti de-Sitter space の略で，反ドジッター時空を意味し，CFT は conformal field theory の略で，共形場理論という場の理論の中でも長さのスケールを持たない理論を意味する．D ブレインは一般には，何次元かの方向に広がっている板状の物体であるが，うまく選ぶと多数の D ブレインを集めて反ドジッター時空を構成することができる．この時空には時間的境界が存在し，それは単に平坦なミンコフスキー時空である．**AdS/CFT 対応は，「反ドジッター時空の（量子）重力理論は，その境界上の共形場理論と等価である」という主張**である．この対応の応用例として反ドジッター時空におけるブラックホールを考えると，そのブラックホールと同じ温度を持った共形場理論と等価ということになる．この場合，ブラックホールのエントロピーは，単に有限温度の熱力学系のエントロピーと解釈される．従って，AdS/CFT 対応を用いるとブラックホールの熱

力学は，もはや当然の帰結となる．

このAdS/CFT対応は実は，前に述べたホログラフィー原理の一例になっている．ここに来てホログラフィー原理は，具体的にそれが成り立つ重要な例を獲得したことになり，それ以後は，ほぼすべての超弦理論の研究者に受け入れられる考え方になった．

1.4 新旧のアイデアの融合：重力のエントロピーとエンタングルメント・エントロピー

さてホログラフィー原理やAdS/CFT対応という新しく非常に強力なアイテムを手に入れたので，ここで元の問題に戻り，エンタングルメント・エントロピーが重力理論のエントロピーとして解釈できるかどうか考え直してみよう．そのためには逆算することを考えて，共形場理論のエンタングルメント・エントロピーが反ドジッター時空における重力理論でどのように計算されるのかAdS/CFT対応に基づいて考えてみればよい．その結果はシンプルで，(1.1)において，ブラックホールの表面積の代わりに，反ドジッター時空の中で面積を最小にする曲面（極小曲面）の面積で置き換えればよいのである．この事実は，2006年に笠と著者が発見したもので[5],[16]，**ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー**と呼ばれる．これはベッケンシュタイン・ホーキングの公式をブラックホールの存在しない時空へ拡張したものとも解釈できる．つまり場の理論のエンタングルメント・エントロピーを重力理論の立場で解釈すると，ブラックホールのエントロピーとは一般に異なるが，それを一般化した重力的なエントロピーとなっているのである．

従って，場の理論のエンタングルメント・エントロピーが与えられると，対応する重力理論の様々な曲面の面積が求められるので，最終的に時空の計量を決定できると期待される．つまりホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを用いると，**重力理論の計量と場の理論の量子エンタングルメントが直接対応する**という本質的な原理が明らかになったと言える．この事実は，量子重力理論の理解には，量子情報理論の考え方が重要であることを示唆している．

また，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは，一般に相互作用する場の理論では計算が困難なエンタングルメント・エントロピーを，比較的簡単な幾何学的な計算に帰着できるという長所も持っている．このような最近の発展を解説することが本書の主要なテーマである．

1.5 物性物理とエンタングルメント・エントロピー

一方で物性物理の分野においても2000年に入ってからエンタングルメント・エントロピーのような量子情報理論の考え方を導入した研究が盛んになされて

いるのでこの話題にも触れておきたい．一言で言うと，絶対零度で起こる相転移（量子相転移）を調べる際に，エンタングルメント・エントロピーは**量子的秩序パラメーター**として機能し，量子相の分類をする際に役立つ．

一般に，物性物理で扱うスピン系や電子系のような多体系の量子力学（量子多体系）は，複雑なハミルトニアンで定義されており，理論の基底状態を解析的に求めることができない場合も多い．そのような場合は，数値的な計算を行って，基底状態の性質を調べて分類できればありがたい．この場合に，比較的に計算しやすく，分類にとても役に立つ量がエンタングルメント・エントロピーである．エンタングルメント・エントロピーを計算することで系の量子的な自由度を見積もることができる．相関関数も役に立つ物理量であるが，どの演算子を選ぶべきかという不定性があり，一般の量子系で計算しやすいとは限らない．

エンタングルメント・エントロピーは，量子相転移を起こす際に発散する．これは量子臨界点ではギャップが消え，量子的な揺らぎが強くなり自由度が大きくなるからである．その意味で，秩序パラメーターとみなすことができる．例えば，エンタングルメント・エントロピーの発散の振る舞いから量子 1 次元系の量子臨界点に対応する 2 次元共形場理論の中心電荷（セントラルチャージ）と呼ばれる重要な情報を決定することができる．

また量子多体系にギャップがあり，トポロジカルな秩序が存在する場合[17] にも威力を発揮する．この場合には，相関関数のように局所的な物理量を計算しても，理論がトポロジカルなので自明になってしまい基底状態の性質を知ることができない．しかし，エンタングルメント・エントロピーは非局所的な物理量であり，実際にトポロジカルな秩序を検出することができるのである[18]．

第 2 章
エンタングルメント・エントロピーの基礎

本章では，本書の中心テーマとなる量子エンタングルメントとその強さを見積もるエンタングルメント・エントロピーの定義や性質に関して説明したい[4]．仮定する知識は，量子力学と統計力学の基礎だけとし，密度行列を用いた記述を復習することからスタートして解説していきたい．

2.1　量子力学における密度行列とエントロピー

量子力学において，物理的状態は**波動関数** Ψ で指定され，系全体に相当するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{tot}$ に属すベクトル $|\Psi\rangle$ として記述される．ハミルトニアンがエルミート演算子 H で与えられる系の時間発展はシュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle, \tag{2.1}$$

で記述される．

物理量は，そのヒルベルト空間に作用するエルミート演算子（O と書く）として表され，ある状態における物理量はその期待値で与えられる：

$$\langle O\rangle = \langle\Psi|O|\Psi\rangle. \tag{2.2}$$

ここで，波動関数ベクトルは，$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ と正規化している．

このように波動関数で与えられる状態を**純粋状態** (pure state) と呼ぶ．しかし現実には，ある物理系の一部分（部分系）に着目して量子論を構成する方が便利なことも多い．例えば，熱浴と接している有限温度の系では，熱浴部分は無視するので，ある統計平均として与えられる状態を考える必要がある．そのようなものを一般に**混合状態**と呼ぶ．混合状態は**密度行列** ρ_{tot} で記述され（tot は全体の系を意味し，後で便利なように付けている），物理量は

$$\langle O\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{tot}}[O\cdot\rho_{tot}], \tag{2.3}$$

のように，密度行列で記述される確率分布による統計平均として計算される．密度行列は，$\mathrm{Tr}[\rho_{tot}] = 1$ となるように正規化している．

純粋状態を密度行列で記述すると，

$$\rho_{tot} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{2.4}$$

となり，物理量の計算 (2.3) は (2.2) に帰着する．

混合状態の例として，ハミルトニアンが H で与えられる系の温度 $T = 1/\beta$ のカノニカル分布を考えると，密度行列は

$$\rho_{tot} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \tag{2.5}$$

で与えられる．Z は分配関数を表し，自由エネルギー F とは，

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{tot}} e^{-\beta H} = e^{-\beta F}, \tag{2.6}$$

という関係がある．系のエントロピーを統計力学に従って計算すると

$$\begin{aligned} S_{tot} &= -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} && (2.7) \\ &= \frac{1}{Z}\left(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{tot}}[\beta H e^{-\beta H}] + Z \log Z\right) && (2.8) \\ &= \beta(E - F), && (2.9) \end{aligned}$$

となり**熱力学的エントロピー**と自由エネルギーの関係式 $F = E - TS$ を再現する．一方，式 (2.8) を書き換えて，密度行列 ρ_{tot} を用いて表すと

$$S_{tot} = -\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{tot}}[\rho_{tot} \log \rho_{tot}], \tag{2.10}$$

と書ける．この式 (2.10) の右辺は，密度行列 ρ_{tot} に対する**フォンノイマン (von Neumann)・エントロピー**と呼ばれる．このように熱力学的エントロピーは，量子力学の密度行列の記述を用いるとフォンノイマン・エントロピーとして簡潔に定式化することができる．

2.2 エンタングルメント・エントロピーの定義

まず量子多体系において，全体の系（全体系とも表記する）を部分系 A と B の 2 つに重複がないように分ける．数学的には，系全体に相当するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{tot}$ を以下のように A と B に対応するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の直積に分解できたとする：

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \tag{2.11}$$

例えば，2 つの電子のスピンが相互作用している系を考える．この場合に片方の電子スピンを A，もう片方を B と呼ぶと式 (2.11) のようにヒルベルト空間

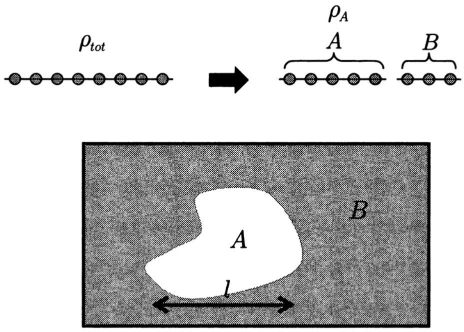


図 2.1　エンタングルメント・エントロピー S_A を定義する際の部分系 A とその補集合 B の取り方の例．上図はスピンが 1 次元的に多数並んだ系（スピン鎖）の場合．下図は場の理論の場合で，時間一定面の空間を A と B に分割する．

が分解されるのは明らかである．さらにスピンの数を増やし n 個のスピンを考えると，部分系 A を $k(<n)$ 個のスピンにとると，部分系 B は $n-k$ 個のスピンからなる部分に相当する．この部分系 A の k 個のスピンの選び方は任意である．図 2.1 の上図を参照されたい．このように，一般の量子多体系では，部分系 A の選び方は数多くあり，どのように選んでもかまわない．場の量子論のように無限個の粒子からなる系では，無限個の異なる A の選び方が存在する．図 2.1 の下図はその一例で，実際の計算ではこのように A をつながったものにとることが多い．

さらに A に**制限された密度行列** ρ_A を，全体の系の密度行列 ρ_{tot} の $\mathcal{H}_B$ に関するトレースをとることで次のように定義する：

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}[\rho_{tot}]. \tag{2.12}$$

一般に密度行列が与えられると，演算子の期待値を取って物理量が計算できるが，A にのみに依存する物理量に対応する任意の演算子（O_A と書くことにする）は，

$$\langle O_A \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{tot}}[O_A \rho_{tot}] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A}[O_A \rho_A], \tag{2.13}$$

のように ρ_A を用いて期待値を計算できる．しかし ρ_A は最初から $\mathcal{H}_B$ に関してはトレースをとって平均されてしまっているので，B に関係する詳細の情報は失われている．言い換えると，仮に全体の系が純粋状態 (2.4) であっても，B に関してトレースをとった ρ_A は一般に混合状態になる．

さて，エンタングルメント・エントロピーはこの設定のもとで A に制限された密度行列 ρ_A に対するフォンノイマン・エントロピーとして以下のように定義される：

$$S_A = -\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A}[\rho_A \log \rho_A]. \tag{2.14}$$

もともとの系が純粋状態だとすると，全体系に対するフォンノイマン・エントロピー (2.10) はゼロである．これは絶対零度におかれた量子多体系のエントロピーは通常ゼロであることに対応する．しかし部分系 B に関してトレースをとる，つまり観測者が B を見えないと仮定すると B の情報が失われ，損失した情報量を S_A が見積もっていると解釈できる．言い換えるとエンタングルメント・エントロピー S_A は A と B の量子的相関すなわち量子エンタングルメントの強さを測る量と言える．

感じをつかむために先ほど出てきた 2 つの電子スピンからなる系に関して，エンタングルメント・エントロピー S_A を具体的に計算してみよう．これは，エンタングルメント・エントロピーが非自明となる最も簡単な例と言える．全体の系の波動関数が次で与えられる純粋状態を考えることにする

$$|\Psi\rangle = \cos\theta|0\rangle_A|1\rangle_B + \sin\theta|1\rangle_A|0\rangle_B. \tag{2.15}$$

ここで，電子のスピンは 1/2 であるため，各スピンの状態は $|0\rangle$（上向き）と $|1\rangle$（下向き）の 2 種類ある．この状態 (2.15) に関して A に制限された密度行列 ρ_A を計算すると，

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}|\Psi\rangle\langle\Psi| = \cos^2\theta|0\rangle_A\langle 0|_A + \sin^2\theta|1\rangle_A\langle 1|_A, \tag{2.16}$$

と計算される．従って，エンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A = -\cos^2\theta\log\cos^2\theta - \sin^2\theta\log\sin^2\theta, \tag{2.17}$$

と求められる．S_A が最大になるのは，$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ の場合であり，その一例がスピンの一重項

$$|\Psi\rangle = (|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B)/\sqrt{2}, \tag{2.18}$$

である．この場合は，A のスピンが上向き（もしくは下向き）であれば必ず B のスピンは，下向き（上向き）となっているので，A と B の相関は大きくなる．この状態は，原理的には A と B のスピン間の距離に関係なく実現でき，非局所的な相関をもたらす．このような量子力学特有の A と B の相関は，一般に**量子エンタングルメント**と呼ばれ，状態の重ね合わせに起因することから分かるように，古典力学にはない量子力学特有の現象である．この量子エンタングルメントによる相関がどれだけ生じているのかを定量的に測るものがエンタングルメント・エントロピーという量なのである．

このときエンタングルメント・エントロピーは，$S_A = \log 2$ であることがすぐに分かるが，この 2 は A と B のヒルベルト空間の次元が 2 であることに由来する．一般に実現可能なエンタングルメント・エントロピーの最大値は $\log|\mathcal{H}_A|$ と $\log|\mathcal{H}_B|$ の小さい方で与えられる．ここで $|\mathcal{H}|$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の次元を表す．従って，(2.18) のような状態は確かに最大のエンタングルメント・エ

ントロピーを有しており，量子情報理論においてエンタングルメントの単位として基本的な役割を果たし，しばしば **EPR ペア** (Einstein–Podolsky–Rosen pair) とか**ベルペア** (Bell pair) などとも呼ばれる．

一方，$\theta = 0$ とすると，$|\Psi\rangle = |0\rangle_A |1\rangle_B$ のように直積で書け，A のスピンと B のスピンの相関は存在しないことになるが，実際に (2.17) から $S_A = 0$ となることが分かる．このように $S_A = 0$ は A と B の間に量子エンタングルメントがないことを意味する．

全体系が純粋状態の場合は一般に，エンタングルメント・エントロピーは量子エンタングルメントの強さを表す．しかし，全体が混合状態の場合にはエンタングルメント・エントロピーは量子エンタングルメント以外に古典的な相関も含むので注意が必要である．例えば，有限温度の量子多体系において S_A を計算すると熱力学的なエントロピーの寄与も含まれる．全体系が純粋状態の場合は，「量子エンタングルメントが存在しない $\leftrightarrow$ 状態が $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B$ と直積で与えられる」と定義するが，全体系が混合状態となる場合には「量子エンタングルメントが存在しない $\leftrightarrow$ 密度行列が $\rho_{tot} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$ と書ける」というように定義を拡大する必要がある．これに対応して，混合状態の場合にも量子エンタングルメントを測ることができる量が量子情報理論において提案されているが [19]，本書の目的のためには，混合状態に対してもエンタングルメント・エントロピー (2.14) を考えるほうが便利であるので，この詳細には立ち入らないことにする．

エンタングルメント・エントロピー (2.14) の拡張についても触れておきたい．1 パラメーター拡張したものとして，**レンニ (Renyi)・エントロピー** $S_A^{R(q)}$ と**サリス (Tsallis)・エントロピー** $S_A^{T(q)}$ が良く知られ，次のように定義される

$$S_A^{R(q)} = \frac{\log \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A} (\rho_A)^q}{1-q}, \tag{2.19}$$

$$S_A^{T(q)} = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A} (\rho_A)^q - 1}{1-q}. \tag{2.20}$$

どちらも $q \to 1$ の極限で，エンタングルメント・エントロピー S_A に帰着する．このパラメーター q に関して定義されたエントロピーを全ての q に関して求めることができれば ρ_A の固有値分布（**エンタングルメント・スペクトラム**と呼ばれる）が分かる．

2.3 情報のエントロピーとしての解釈

次に，エンタングルメント・エントロピーを情報のエントロピーとして解釈できることを説明したい．まず古典的な情報のエントロピー（**シャノンのエントロピー**と呼ばれる）を説明しよう [4],[6]．n 種類の状態が，それぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ の確率で出現する場合を考える．この時に，どの状態が実現されているかとい

う情報に対する情報量を見積もりたい．そこで，2 進法で状態を表す場合に最低限必要な桁数（ビット数）の期待値として情報量のエントロピー $S(p)$ を定義する．式で書くと，状態の出現を N 回繰り返して測定するとして，

$$S(p) = \lim_{N\to\infty} \frac{[2\text{ 進法で状態を表す場合に最低限必要な桁数（}N\text{ 回の総和）}]}{N}. \tag{2.21}$$

例えば，1 種類の状態のみ出現する $p_1 = 1, p_2 = \cdots = p_n = 0$ の場合は，2 進法で 0 桁でよいので，$S(p) = 0$ となる．逆に，すべて等確率の場合 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ は，n 種類の状態すべてを表す必要があるので，少なくとも $\log_2 n$ 桁必要であり，$S(p) = \log_2 n$ となる．より一般の確率分布の場合は，出現確率が高い順に優先的に 2 進法の低い桁の数を割り振るという，いわゆる情報の圧縮を行う．その結果，式 (2.21) は次のような有名な形にかける（シャノンの定理）

$$S(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i. \tag{2.22}$$

これを**シャノンの情報エントロピー**と呼ぶ．

さて，以上は古典的な系に対する情報のエントロピーであったが，これを量子論に自然に拡張したのがフォンノイマン・エントロピー (2.10) である．式 (2.22) において，確率密度を密度行列に置き換えたものと言える．従って，エンタングルメント・エントロピー (2.14) は，部分系 B が観測できない場合に生じる情報のあいまいさを情報のエントロピーとして見積もったものと解釈できる．

一方，ボルツマンのエントロピーは，微視的状態数の log を取ることで定義される．統計力学では熱力学的なエントロピーをボルツマンのエントロピーとして微視的に解釈するが，考えている物理系が十分大きければ，このボルツマンのエントロピーは情報のエントロピーと一致する．例えば N 個の粒子を，$N_1, N_2, \cdots, N_n$ 個ずつ分けて，1 から n のラベルを付けることを考える．もちろん $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ である．状態数 W は，

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \cdots N_n!}, \tag{2.23}$$

であるので，スターリングの公式 $\log N! \simeq N \log N - N$ を用いて，

$$\log W \simeq N \log N - \sum_{i=1}^{n} N_i \log N_i = -N \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i, \tag{2.24}$$

と書ける．ここで $p_i = \frac{N_i}{N}$ と定義した．p_i は i のラベルが出現する確率であるので，確かにボルツマンのエントロピー (2.24) を粒子を取り出す回数の N で割った値は，情報のエントロピー (2.22) に一致する．但し，対数の底の値の違いは無視している．

2.4 エンタングルメント・エントロピーの基本的性質

ここでは，エンタングルメント・エントロピーが一般に満たす基本的な性質をいくつか説明したい [4]．式 (2.11) のように全体系が部分系 A と B から構成される場合を考える．この時，全体系が純粋状態であれば，任意の A の取り方に対して必ず次の関係式が成り立つ．

$$S_A = S_B. \tag{2.25}$$

一方，全体系が混合状態の場合は一般にこの関係式は成り立たない．この式 (2.25) の証明は，シューミット (Schmidt) 分解を用いると簡単である．状態ベクトル $|\Psi\rangle$ をシューミット分解すると一般に

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i |\alpha_i\rangle_A \otimes |\beta_i\rangle_B, \tag{2.26}$$

と書ける．ここで M は，$\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の次元のうち小さな方である．これを用いると ρ_A と ρ_B がともに $M \times M$ の固有値 λ_i^2 の行列であることが分かり，式 (2.25) は明らかである．

この関係式 (2.25) から分かることは，純粋状態の系ではエンタングルメント・エントロピーが熱力学的エントロピーとは異なり， 部分系 A の体積に比例するという性質を持たないことである．つまり示量的ではないのである．なぜなら，部分系 A を大きくとると B が小さくなるが，その場合でも S_A と S_B は等しいままであるからである．

さらにもうひとつ重要な性質として**強劣加法性** (Strong subadditivity) がある．まず，全体系（純粋状態でも混合状態でもよい）を $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ のように 3 つに分ける．そして $\mathcal{H}_C$ に関してトレースをとって，$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ に制限された密度行列のエンタングルメント・エントロピーを $S_{A\cup B}$ などと書くとすると，以下のような強劣加法性の不等式が証明できる [4], [6], [20]：

$$S_{A\cup B\cup C} + S_B \leq S_{A\cup B} + S_{B\cup C}. \tag{2.27}$$

この証明は多少複雑なので本書では割愛する．強劣加法性は，エンタングルメント・エントロピーの**凹性** (Concave) を表している．

感じをつかむためにに A, B, C を数だとして，(2.27) を $S(A{+}B{+}C){+}S(B) \leq S(A + B) + S(B + C)$ と解釈してみよう．特に，$A = C = \frac{x-y}{2}$, $B = y$ とおいてみると，$S(x) + S(y) \leq 2S\left(\frac{x+y}{2}\right)$ が得られ，実際に $S(x)$ という関数が，（下に）凹関数であることが分かる．

一般に全体系が混合状態であっても，新しいヒルベルト空間を直積することでその全体を純粋状態にすることができる（**純粋化**の操作と呼ぶ）．この事実と関係式 (2.25) を用いると，強劣加法性 (2.27) は以下のようにも書き直せる．

$$S_A + S_B \leq S_{A\cup C} + S_{B\cup C}. \tag{2.28}$$

実際，$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D$ と拡張して，このヒルベルト空間に対して純粋状態であるとする．この時，$S_{A\cup B\cup C} = S_D$ や $S_{B\cup C} = S_{A\cup D}$ を用いて，(2.27) から $S_B + S_D \leq S_{A\cup B} + S_{A\cup D}$ を得る．ヒルベルト空間のラベルを付け替えれば (2.28) を得る．

さらに，(2.27) と (2.28) において B を空集合とすると以下の三角不等式が得られる．

$$|S_A - S_B| \leq S_{A\cup B} \leq S_A + S_B. \tag{2.29}$$

特に左側の不等式は**荒木・リーブ (Araki–Lieb) 不等式**，右側は**劣加法性**と呼ばれる．

また

$$I(A:B) = S_A + S_B - S_{A\cup B} \geq 0, \tag{2.30}$$

として**相互情報量** (mutual information) $I(A:B)$ を定義すると，強劣加法性 (2.27) は

$$I(A:B\cup C) \geq I(A:B), \tag{2.31}$$

と表される．相互情報量 $I(A:B)$ は，部分系 A と B がどれだけエンタングルしているかの目安を与える量であり，劣加法性より必ず非負である．

2.5 エンタングルメント・エントロピーの計算例：調和振動子の対

この章の最後に，基本的な例として 2 つの調和振動子 A と B の間のエンタングルメント・エントロピーを計算してみよう．ハミルトニアンを

$$H = a^\dagger a + b^\dagger b + \lambda(a^\dagger b^\dagger + ab), \tag{2.32}$$

とする．$(a, a^\dagger)$ と $(b, b^\dagger)$ はそれぞれ，調和振動子 A と B の**生成消滅演算子**であり，交換関係

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1, \tag{2.33}$$

を満たす．また λ は，2 つの調和振動子間の相互作用をあらわすパラメーターである．ハミルトニアン (2.32) を対角化するために，新しい生成消滅演算子 $(\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$ と $(\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger)$ を以下のように定義する

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \cosh\theta \cdot a + \sinh\theta \cdot b^\dagger, \\ \tilde{b} &= \sinh\theta \cdot a^\dagger + \cosh\theta \cdot b. \end{aligned} \tag{2.34}$$

この変換は交換関係を保つ線形変換であり，いわゆるボゴリューボフ変換である．θ を

$$\lambda = \frac{2\sinh\theta\cosh\theta}{1+2\sinh^2\theta}, \tag{2.35}$$

と選ぶと，ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{1+2\sinh^2\theta}\left(\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + \tilde{b}^\dagger\tilde{b} - 2\sinh^2\theta\right), \tag{2.36}$$

と対角化される．

この系の基底状態 $|\Psi\rangle$ は，$\tilde{a}|\Psi\rangle = \tilde{b}|\Psi\rangle = 0$ で定義される．これをもともとの生成消滅演算子の立場で書き直すと

$$\begin{aligned}
&(\cosh\theta\cdot a + \sinh\theta\cdot b^\dagger)|\Psi\rangle = 0,\\
&(\sinh\theta\cdot a^\dagger + \cosh\theta\cdot b)|\Psi\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

となる．この状態は $a|0\rangle_A = 0$ と $b|0\rangle_B = 0$ で定義されるフォック空間の真空を用いて，以下のように書ける．

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh\theta}\cdot e^{-\tanh\theta a^\dagger b^\dagger}|0\rangle_A\otimes|0\rangle_B. \tag{2.38}$$

部分系 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ を，$|0\rangle_A$ と $|0\rangle_B$ にそれぞれ $a^\dagger$ と $b^\dagger$ を任意の回数だけ作用させて構成されるフォック空間とすると，部分系 $\mathcal{H}_A$ に制限された密度行列は，

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \frac{1}{\cosh^2\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tanh\theta)^{2n}}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle_A\langle 0|_A a^n\\
&= \frac{1}{\cosh^2\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh\theta)^{2n}|n\rangle_A\langle n|_A.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

ここで，正規化された励起状態 $|n\rangle_A = (n!)^{-1/2}(a^\dagger)^n|0\rangle_A$ を定義した．この A に対する密度行列 (2.39) は， $e^{-1/T} = \tanh^2\theta$ で与えられる温度 T のカノニカル分布とも解釈できることに注意してほしい．この ρ_A からエンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A = \cosh^2\theta\cdot\log\cosh^2\theta - \sinh^2\theta\cdot\log\sinh^2\theta, \tag{2.40}$$

と求められる．相互作用がない，すなわち $\lambda = 0$ とすると，(2.35) より $\theta = 0$ となり，$S_A = 0$ となる．これは相互作用がないと A と B がエンタングルしないので当然の結果といえる．また S_A は λ の単調増加関数であることが分かるが，相互作用が強ければそれだけエンタングルするので自然といえる．

第 3 章
場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算

本章ではまず，場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーを計算する一般的方法であるレプリカ法を解説する．その後で，面積則という重要な性質や簡単な具体例を説明する．また物性物理への応用を念頭に置いて，量子相転移とエンタングルメント・エントロピーの関係にも触れる．

3.1 場の理論のエンタングルメント・エントロピーとレプリカ法

まず，本書の主なテーマである**場の理論におけるエンタングルメント・エントロピー**の定義を説明したい．量子多体系におけるエンタングルメント・エントロピーの定義は既に説明したとおりである．例えば多数のスピンから構成される格子系であれば，格子全体の空間的領域を A と B に分けて，それぞれに属すスピンのヒルベルト空間を $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ とすることによってエンタングルメント・エントロピー S_A が定義される．場の理論は，通常このような量子多体系の連続極限（格子間隔 ϵ をゼロにする極限）とみなせるので，時間一定面の空間を A と B に分けることで自然に定義される（図 2.1 の下図参照）．

$d+1$ 次元における質量 m の実自由スカラー場理論を考えると次の作用で表される*1)．

$$S=\int dtd^dx\left[\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}(\partial_i\phi)^2-\frac{m^2}{2}\phi^2\right]. \tag{3.1}$$

このスカラー場理論の d 次元の空間方向を正方格子状に離散化することを考えてみよう．スカラー場の空間微分を

*1) 本書では素粒子論の慣習に従って，空間 d 次元と時間が 1 次元ある時空上の場の理論を $d+1$ 次元の場の理論と呼ぶ．物性物理では，d 次元量子多体系というと空間が d 次元という意味であり，その連続極限は $d+1$ 次元の場の理論で記述されることに注意されたい．

$$\partial_i \phi(x) \simeq \frac{\phi_{\vec{x}+\epsilon\vec{n}_i} - \phi_{\vec{x}}}{\epsilon}, \tag{3.2}$$

のように差分で置き換える．ここで $\vec{x}$ は格子点の座標，$\vec{n}_i$ は i 方向の単位ベクトル．この離散化を (3.1) に対して行うと，相互作用する無限個の調和振動子の系とみなせることが分かる．エンタングルメント・エントロピーの計算は，原理的には，2.5 節で一対の調和振動子に対して行ったものを拡張すれば可能である．全体系の波動関数は，すべての格子点 $\vec{x}$ に対する $\{\phi_{\vec{x}}\}$ の値の関数である．連続極限を取って言い換えると，波動関数は，時間一定面上の場の配位 $\phi(x)$ の汎関数となる．従って，時間一定面の空間全体を部分領域 A と B に分けることで，ヒルベルト空間を $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ と分けることができる．$\mathcal{H}_A$ は，領域 A 内の場の配位全体として定義される．このように場の理論のエンタングルメント・エントロピーは，A と B の境界 $\partial A(=\partial B)$ を指定することで幾何学的に定義され，**幾何学的エントロピー**と呼ばれることもある（図 2.1 の下図参照）．

次にエンタングルメント・エントロピーの計算方法について説明しよう．定義式 (2.14) を直接計算することは困難な場合が多い．そこで，まず $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_A}\rho_A^n$（以下 $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ と略す）を計算して，以下のように求める：

$$S_A = \lim_{n\to 1}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{Tr}\rho_A^n\right] = \lim_{n\to 1}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\log\left(\mathrm{Tr}\rho_A^n\right)\right]. \tag{3.3}$$

この方法は**レプリカ法**と呼ばれる．その理由は後述するように，$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ をもとの理論の n 重のコピーをとった理論の分配関数とみなせるからである．従って n は通常は自然数であるが，(3.3) の計算を実行するには，n に関して解析接続する必要がある．これが常に可能かどうかは微妙な問題であるが，本書で扱う例を含めて主要な例では問題とはならないのでその正当性にはこれ以上立ち入らないことにする．

さて，それでは $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を計算するにはどのように考えたらよいのか説明しよう．そのためには，場の理論における経路積分の考え方を用いると便利である [21]~[23]．まず，場の理論の時間座標 t をウィック回転して（具体的には $x_0 = it$ の変換を意味する）空間座標 x_0 にする．理論に出てくる場を総称して ϕ と書くことにすると，その場は x_0 と他の空間座標 x_i $(i = 1, 2, \cdots, d)$ の関数となる．特に説明を簡単にするために $d = 1$ すなわち 2 次元の場の理論を考えることにすると，場は $\phi(x_0, x_1)$ と表される．このユークリッド化された場の理論において，分配関数 Z は，次のような経路積分として表される：

$$Z = \int \prod_{-\infty<x_0<\infty} \prod_{x_1} [D\phi(x_0, x_1)] e^{-S[\phi(x_0,x_1)]}, \tag{3.4}$$

ここで S は，場の理論の作用を意味し，$\phi(x_0, x_1)$ の汎関数となっている．

密度行列を計算することを念頭におくと，場の理論の基底状態の波動関数が経路積分でどのように表されるのか知っておく必要がある．時刻 $x_0 = X_0$ の波動関数は，場の配位 $\phi(X_0, x_1)$ の汎関数である．時間並進対称性があれば，

$X_0=0$ としてもかまわない．これを $\Psi[\phi(x_1)]$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}&\Psi[\phi(x_1)]\\&=\frac{1}{\sqrt{Z}}\int\prod_{-\infty<x_0<0}\prod_{x_1}[D\phi(x_0,x_1)]e^{-S[\phi(x_0,x_1)]}\delta[\phi(0,x_1)-\phi(x_1)],\end{aligned}$$

で与えられる．ここでユークリッド時間 x_0 に関して，$-\infty$ まで積分することは，演算子形式だと $\lim_{T\to\infty}e^{-TH}$ という作用（H は系のハミルトニアン）に相当するので確かに基底状態が実現されるのである．またその複素共役は，

$$\begin{aligned}&\Psi^*[\phi(x_1)]\\&=\frac{1}{\sqrt{Z}}\int\prod_{0<x_0<\infty}\prod_{x_1}[D\phi(x_0,x_1)]e^{-S[\phi(x_0,x_1)]}\delta[\phi(0,x_1)-\phi(x_1)],\end{aligned}$$

と表される．ここで，δ は δ 汎関数を表す．つまり，任意の汎関数 $G[\phi(x_1)]$ に対して，

$$\int\prod_{x_1}[D\phi(x_1)]G[\phi(x_1)]\cdot\delta[\phi(x_1)-\tilde{\phi}(x_1)]=G[\tilde{\phi}(x_1)],\tag{3.5}$$

を満たす．また，規格化条件

$$\int\prod_{x_1}[D\phi(x_1)]\Psi[\phi(x_1)]\Psi^*[\phi(x_1)]=1,\tag{3.6}$$

も明らかに成り立つことが分かる．

さて，全体系の密度行列 ρ_{tot} はこの波動関数を用いて，

$$[\rho_{tot}]_{\phi_-(x_1),\phi_+(x_1')}=\Psi[\phi_-(x_1)]\Psi^*[\phi_+(x_1')],\tag{3.7}$$

と書ける．ここで，場の理論のヒルベルト空間は時刻 $x_0=0$ における場の配位 $\phi(x_1)$ の関数全体で張られる空間である．従って，密度行列 ρ_{tot} の成分の足（添え字）もこの関数空間になるのである．さらに A に制限された密度行列 ρ_A は，時刻 $x_0=0$ において

$$\begin{aligned}&[\rho_A]_{\phi_-\phi_+}\\&=\frac{1}{Z}\int\prod_{-\infty<x_0<\infty}\prod_{x_1}[D\phi(x_0,x_1)]e^{-S[\phi(x_0,x_1)]}\\&\quad\cdot\prod_{x_1\in A}\delta\left[\phi(-0,x_1)-\phi_-(x_1)\right]\cdot\delta\left[\phi(+0,x_1)-\phi_+(x_1)\right],\end{aligned}\tag{3.8}$$

と表される（図 3.1 の (a) を参照）．B に関してトレースをとるということは，時刻 $x_0=0$ における B 上の場の配位について経路積分することを意味する．従って，経路積分を行う領域は，全体から $x_0=0$ の領域 A を除いた領域である．従って，領域 A の上側と下側での場の値が，ρ_A の行列としての足になる．(3.8) の 1 つ目と 2 つ目の δ 汎関数は，それぞれ下側と上側の境界条件に相当する．また $\mathrm{Tr}\rho_A=1$ と規格化されていることも確認できる．

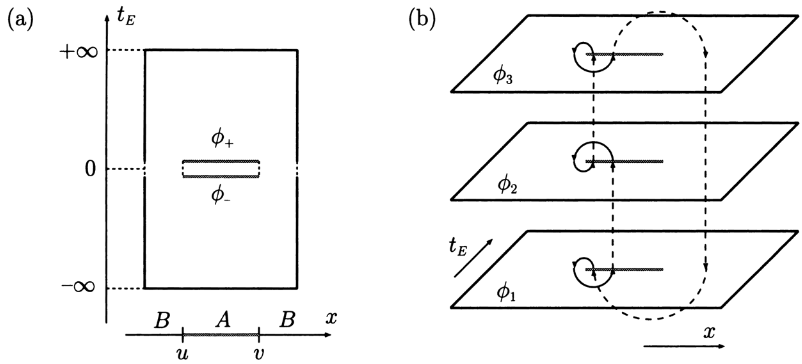


図 3.1 (a) ρ_A を経路積分で表した図．(b) n 枚のシートからなるリーマン面 Σ_n．$n = 3$ として描いている．ともにユークリッド化した時間 $x_0 = t_E$ と，空間方向 $x_1 = x$ の 2 次元上に定義された場の理論を考えている．（文献 [16] の 2 本目の論文より．）

次に $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を考えるとこれは，(3.8) の経路積分を n コピー並べて，隣り合ったもの同士で上側と下側の場の配位に関してトレースをとればよい：

$$\left(\prod_{j=1}^{n}[D\phi_j]\right)[\rho_A]_{\phi_1\phi_2}[\rho_A]_{\phi_2\phi_3}\cdots[\rho_A]_{\phi_n\phi_1}. \tag{3.9}$$

このようにして $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ は，n 枚のシートを領域 A で張り合わせた 2 次元面（リーマン面）Σ_n 上の分配関数（を規格化したもの）とみなせるのである（図 3.1 の (b) を参照）：

$$\mathrm{Tr}\rho_A^n = (Z)^{-n}\int \prod_{(x_0,x_1)\in\Sigma_n}[D\phi(x_0,x_1)]e^{-S[\phi]}. \tag{3.10}$$

また以後の議論を考えると，**レプリカ場**を用いた記述も便利である．場の理論は，一枚の 2 次元シート $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ 上に定義されていると考え，そこに n 個の場 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \cdots, \phi^{(n)}$（レプリカ場）を導入する．それぞれの場はもともと n 枚あったシートの各シート上の場を言い換えたものである．そのとき，もともと領域 A でシートがつながっていた事実を次の境界条件で等価に表現できる（図 3.2 参照）：

$$\phi^{(k)}(e^{2\pi i}(w-u)) = \phi^{(k+1)}(w-u), \quad \phi^{(k)}(e^{2\pi i}(w-v)) = \phi^{(k-1)}(w-v), \tag{3.11}$$

ここで 2 次元の座標を $x_0 + ix_1$ と複素にして表記している． u と v は，領域 A の両端点 ∂A の複素座標を表す． w は任意の複素数である．つまり，(3.11) は，両端点の周りを A をまたぐように一周すると，次のシートに移るという Σ_n の幾何学的特徴を表しているにすぎない．このようにして，(3.11) の境界条件のもとで，2 次元空間 $\mathbf{R}^2$ におけるレプリカ場の分配関数を計算すること

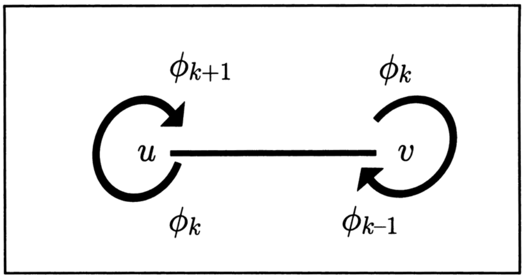


図 3.2　$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ の計算に現れるレプリカ場の境界条件.

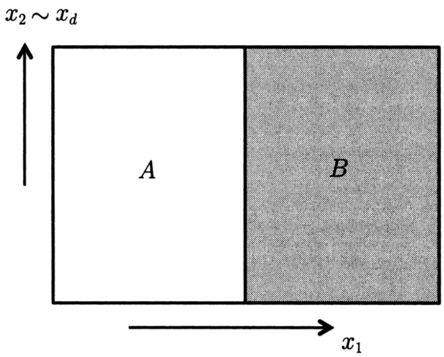


図 3.3　部分系 A のシンプルな選び方.

でも $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を求めることができる.

以上の議論は，そのまま単純に高次元化することも可能である．最も簡単な場合は領域 A が $x_1 > 0$ で定義される場合，すなわち全空間 $\mathbf{R}^d$ の半分で与えられる場合である．この場合には，(x_0, x_1) で張られる $\mathbf{R}^2$ とそれ以外 $\mathbf{R}^{d-1}$ と分けると後者は自明な直積となっているので，前述の 2 次元場の理論と全く同じように取り扱える．実際に次の節で具体的にその計算を行う.

3.2　エンタングルメント・エントロピーの計算の簡単な例

場の理論のエンタングルメント・エントロピーの具体的計算を $d+1$ 次元の自由スカラー場理論 (3.1) を例にとって説明したい． 時間一定面は，座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ で張られる d 次元の空間 $\mathbf{R}^d$ で与えられるが，これを $d-1$ 次元平面 $x_1 = 0$ を境に半分に分けて部分系 A と B を定義しよう（図 3.3 参照）．また計算の便宜上，全体の時空 $\mathbf{R}^{d+1}$ をユークリッド化する．すなわち (3.1) の作用において $t = -ix_0$ のようにウィック回転することで，時間を空間的方向に置き換える．x_0 から x_d までの各座標をフーリエ変換したときの波数（運動量）を $k_0, \cdots, k_d$ とする．このユークリッド空間 $\mathbf{R}^{d+1}$ における自由スカラー

場の分配関数は以下で与えられる：

$$\log Z_{\mathbf{R}^{d+1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{|k|\le\Lambda} d^{d+1}k \ \log(k^2+m^2). \tag{3.12}$$

ここで V_{d+1} は $\mathbf{R}^{d+1}$ の無限大の体積を意味する． $\Lambda = \frac{1}{\epsilon}$ は運動量の最大値（カットオフ）である．この分配関数をシュインガーパラメーター s を用いて書きかえると

$$\begin{aligned}\log Z_{\mathbf{R}^{d+1}} &= \frac{V_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} \int d^{d+1}k e^{-s(m^2+k^2)} \\ &= V_{d+1} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} (4\pi s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-sm^2},\end{aligned} \tag{3.13}$$

と書ける．

さて，エンタングルメント・エントロピーを計算するために $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を計算しよう．前節の考え方を用いると n が自然数の場合は，$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を ∂A の周りに n 重巻き付けてできる $d+1$ 次元空間における分配関数と解釈できる．一方 $n = \frac{1}{N}$（ここで N は自然数）と分数にとると，$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ は $\mathbf{R}^{d+1}$ を N 分の 1 にした空間（**オービフォールド空間**と呼ばれる）$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_N \times \mathbf{R}^{d-1}$ の分配関数と思うことができる [24]．$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_N$ は (x_0, x_1) で張られる $\mathbf{R}^2$ を，角度 $\theta = \frac{2\pi}{N}$ の回転変換 g

$$g : (x_0, x_1) \to (\cos\theta x_0 - \sin\theta x_1, \sin\theta x_0 + \cos\theta x_1), \tag{3.14}$$

で同一視した空間である．$g^N = 1$ なので群としては $\mathbf{Z}_N$ となる．

レプリカ法を行うには n に関して解析接続する必要がある．従って，n が自然数で計算して解析接続しても，$n = 1/N$ という分数の場合に計算してから解析接続しても同じ結果になると期待される．以下では，計算がより簡単な後者の計算法 [24] を用いることにする．さてこの場合に，$\log \mathrm{Tr}\rho_A^n = \log Z_{\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_N\times\mathbf{R}^{d-1}}$ は以下のように計算できる：

$$\log Z_{\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_N\times\mathbf{R}^{d-1}} = V_{d-1} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} (4\pi s)^{-\frac{d-1}{2}} e^{-sm^2} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Tr}\left(\frac{g^j}{N}\right). \tag{3.15}$$

ここで g の作用しない $\mathbf{R}^{d-1}$ の部分に関しては，(3.13) と同じ計算であるが $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_N$ の部分は，同一視の $g=1$ の条件を課すために射影演算子 $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{g^j}{N}$ を挿入してトレースをとっている．このトレースは，$j \neq 0$ の場合は，

$$\mathrm{Tr} g^j = \int d^2k \langle \vec{k}|g^j|\vec{k}\rangle = \int d^2k \delta^2(\vec{k} - g^j \cdot \vec{k}) = \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi j}{N}}, \tag{3.16}$$

と計算される．ここで $\vec{k}$ は $\mathbf{R}^2$ における運動量のベクトルを表し，$|\vec{k}\rangle$ はその運動量状態を意味する．次の公式

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\frac{\pi j}{N}} = \frac{N^2-1}{3}, \tag{3.17}$$

を用いて (3.15) を評価すると，レプリカ法の公式 (3.3) から S_A が求められる：

$$\begin{aligned} S_A &= -\frac{\partial}{\partial(1/N)}\left(\log Z_{\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}_N\times\mathbf{R}^{d-1}} - \frac{1}{N}\log Z_{\mathbf{R}^{d+1}}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}V_{d-1}\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{(4\pi s)^{\frac{d+1}{2}}}e^{-m^2 s}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

ここで $j=0$ の寄与は上式で相殺するので気にしなくてよいことに注意．この結果 (3.18) から明らかなように運動量カットオフの紫外極限 $\epsilon\to 0$ をとると発散する．その主要項を $d>1$ の場合に，あからさまに書くと

$$S_A = \frac{V_{d-1}}{6(d-1)(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}}\cdot\frac{1}{\epsilon^{d-1}} + O(\epsilon^{-(d-3)}), \tag{3.19}$$

となる．一方，$d=1$ の場合は以下のように評価できる：

$$S_A = -\frac{1}{6}\log(m\epsilon). \tag{3.20}$$

このように場の理論のエンタングルメント・エントロピーは一般に発散する．この理由は無限個の量子力学に相当する場の理論の自由度は無限大だからである．従って，場の理論でエンタングルメント・エントロピーを計算する際には必ず紫外カットオフを最初に指定してから行うことになる．また (3.18) から，質量がゼロのスカラー場の場合は，結果はシンプルになり (3.19) の $O(\epsilon^{-(d-1)})$ の主要項のみとなる．

3.3 量子多体系のエンタングルメント・エントロピーの面積則

前節で求めた表式 (3.19) では，発散の主要項は A と B を分ける境界 ∂A の面積に比例している．この性質は部分系 A をどう選ぶかによらず成立することが知られ，**面積則**と呼ばれている [9]．つまり $d+1(>2)$ 次元の場の理論に対して，面積則は一般に次のように表される：

$$S_A = \gamma\cdot\frac{\partial A\text{ の面積}}{\epsilon^{d-1}} + O(\epsilon^{-(d-2)}). \tag{3.21}$$

ここで γ は理論によって決まる数値定数である．厳密に言うと，紫外固定点がある（つまり高エネルギーでスケール対称性をもつ）場の理論の基底状態に対して，面積則 (3.21) が成り立つ．但し，$d=1$ の場合は注意が必要で，スケール不変な（ギャップレスな）理論では，$\log\frac{\partial A\text{ の長さ}}{\epsilon}$ のように log 的に振る舞う．詳細は次の章で説明する．

例えば，一般のエネルギーギャップのある量子多体系でも，ϵ を紫外カットオフ（もしくは格子間隔と解釈してもよい）と解釈すると，相互作用が局所的な系であれば，基底状態に対して面積則 (3.21) が成り立つ．面積則は具体的に自由場理論では証明があり [25], [26]，相互作用が強い場合でも AdS/CFT 対応を用

いて確認されている[16].

熱力学的なエントロピーは示量的な物理量なので体積に比例する．一方，エンタングルメント・エントロピーは表面積に比例している．このことは純粋状態の性質 (2.25) と密接な関係にある．では，有限温度の場の理論に対してエンタングルメント・エントロピーを計算するとどうなるであろうか．実は，有限温度状態のように基底状態から少し励起された状態に対しても面積則は成立することが分かる．その理由は単純で，有限温度のエネルギースケールは有限であるので面積則に対応する紫外発散の振る舞いを変えることはあり得ないからである．しかしながら，有限温度系のエンタングルメント・エントロピーを良く調べると，面積則に付加して現れる有限の寄与が体積に比例し示量的であることが分かる．

さて，部分系 A がその補集合 B よりヒルベルト空間の次元が小さいとする．このとき，最大可能なエンタングルメント・エントロピー $S_A(=S_B)$ は A の体積に比例する．ではどのようにすれば S_A が A の体積に比例するような状態（**体積則**）を構成できるのであろうか？　実は，任意の量子多体系のヒルベルト空間において一般的な状態を取ってきた場合は，体積則に従うことが知られている[27]．言い換えると，非常に高いエネルギースケール（=紫外カットオフ程度）で励起されている状態がヒルベルト空間の中ではありふれており，それらはほぼすべて体積則に従う．

これと関連して，今まで考えている場の理論は局所場の理論であり，局所的な相互作用のみを考慮していることに再度注意しておく．通常は考えないが，もしも場の理論に非局所的で長距離離間に働く相互作用が存在するとすると，一般にはハミルトニアンは空間微分が無限回を含むことになる．このような理論においては基底状態であっても一般には体積則に従う．具体例は文献 [28] などを参照．

歴史的には，エンタングルメント・エントロピーの面積則とブラックホールのエントロピーの面積則 (1.1) との類似性が，場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーを研究する動機の一つとなった[10],[11]．しかしながら両者には大きな違いがあることがすぐに分かる．まず，前者は紫外発散しているが後者は有限な量である．さらに前者は，係数 γ が考えている場の理論の詳細に依存する．例えば場の数を 2 倍にすると γ も 2 倍になる．一方ブラックホールのエントロピーは普遍的な公式 (1.1) で与えられるので物質場の数に依存しない．

しかしながら，両者に全く関係がないのかというとそうではない．公式 (1.1) が計算するのは古典重力理論のブラックホールのエントロピーである．一般に量子効果によるエントロピーの補正があり，それはブラックホールの周りにある場の経路積分から生じる．従ってその補正は場の数に比例し，繰りこみ操作をしないと紫外発散を含む．この量子補正は最終的に重力定数 G_N の繰りこみと

解釈されるので，面積則にやはり従うことが分かる．このようにブラックホールのエントロピーの量子補正がちょうどエンタングルメント・エントロピーと解釈できるのである [10], [11]．

では，ブラックホールのエントロピーの全体をエンタングルメント・エントロピーと解釈することはできないのであろうか？　この問いに対する解答は，後述するようにホログラフィー原理もしくは AdS/CFT 対応という新しい考え方を用いることで得られるのである．

3.4 エンタングルメント・エントロピーと量子相転移

量子多体系の研究においてエンタングルメント・エントロピーを考える最大の御利益は，それが量子的な秩序パラメーターと解釈できることである．一般に秩序パラメーターは，相転移が起こる際に特徴的な振る舞いをする．特に絶対零度で磁場などの外場の値を変化させて起こる相転移を**量子相転移**と呼ぶが，エンタングルメント・エントロピーはその**秩序パラメーター**となり，量子相転移を判定したり，量子相を分類したりすることができる．

量子相転移が起こる点では相関長 ξ が発散しギャップが消える．この点を**量子臨界点**と呼ぶ．量子臨界点近傍の $1+1$ 次元系で，部分系 A を半直線にとったときに，エンタングルメント・エントロピーは次のように振る舞う：

$$S_A \sim \frac{c}{6}\log\frac{\xi}{\epsilon}. \tag{3.22}$$

c は理論を特徴づける定数で，量子臨界点を記述する 2 次元共形場理論の**中心電荷** c に一致する（次章参照）．例えば，自由スカラー場 $(c=1)$ で記述できる量子多体系（例えばハイゼンベルグ模型）では，(3.20) から，$m \sim 1/\xi$ の関係を用いて (3.22) を導ける．

イジング (Ising) 模型 $(c=1/2)$ で，磁場をスピンと直交する方向にかける場合を考える [21]．ハミルトニアンは，スピン演算子の z と x 方向の成分 σ^z,σ^x を用いて，

$$H = -\lambda\sum_{i=1}^{L}\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z - \sum_{i=1}^{L}\sigma_i^x, \tag{3.23}$$

と表される．スピンは全部で L 個あり（L は十分大きいとする），λ は，相互作用のパラメーターである．この系に対して，実際に S_A を計算してプロットしたものが図 3.4 である．$\lambda=1$ で S_A が (3.22) に従って発散し，量子相転移を起こすことが確認できる．$\lambda=0$ は，磁場は相対的に大きい極限に相当し，$0<\lambda<1$ は，スピンの向きがそろわない常磁性体の相になる．従って，$S_A(\lambda=0)=0$ である．一方，$\lambda\to\infty$ では磁場が無視できる極限であり，$\lambda>1$ は，スピンが上か下かにすべて揃う強磁性体の相になる．従って $S_A(\lambda\to\infty)=\log 2$ と

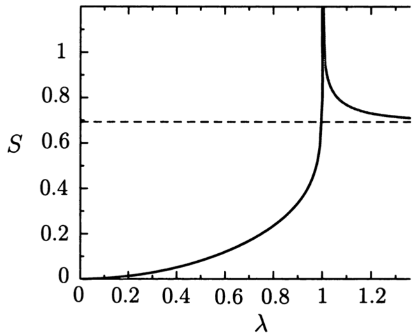


図 3.4 絶対零度のイジング模型においてスピンと直交する方向に磁場をかけた場合のエンタングルメント・エントロピーの振る舞い（実線）．$\lambda \to \infty$ での値 $\log 2$ を点線で記してある．$\lambda = 1$ が量子臨界点.（文献 [21] より.）

なる．

以上の例を逆に見てみると，与えられたハミルトニアンで定義された量子多体系が量子臨界点でどのような 2 次元共形場理論に対応するのか理解したい場合にエンタングルメント・エントロピーを計算することで，中心電荷 c を数値的に計算することができ，量子臨界点を分類することができる．実際に最近では量子多体系の中心電荷を最も簡便に数値的に計算する手法として，エンタングルメント・エントロピーを用いることが主流になってきている．

エンタングルメント・エントロピーは，量子臨界点から離れた大きなギャップのある系に対しても量子相の分類に利用することができる場合がある．その代表的な例が，**トポロジカルなエンタングルメント・エントロピー**である [18]．$2+1$ 次元のギャップのある量子多体系を考え，部分系 A をサイズ l の領域（円盤とトポロジーが同じ多様体と仮定するが，詳細の形は任意）とした場合のエンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A = \gamma \cdot \frac{l}{\epsilon} + S_{top}, \tag{3.24}$$

のように振る舞う．最初の項が面積則の発散項であり，第 2 項は有限な項でカットオフに依存しない．興味深いことに S_{top} は，部分系 A の形をスムーズに変形しても値が変化しないことが分かる．そこで S_{top} はトポロジカルなエンタングルメント・エントロピーと呼ばれる．

トポロジカルな秩序がある量子相（**トポロジカル相** [17]）では，相関関数のように局所的な物理量はすべて自明になる．従って，基底状態のトポロジカルな性質を調べるには，非局所的な量を計算する必要がある．その代表的な例がトポロジカルなエンタングルメント・エントロピーなのである．実際，S_{top} は，**全量子次元** D と呼ばれるトポロジカル相の自由度を特徴づける量を用いて $S_{top} = -\log D$ と表される．

しかしながらトポロジカルな秩序がエンタングルメント・エントロピーで完全に分類できるわけではない．そのような場合は，部分系 A に制限された密度行列の固有値分布から量子相の特徴づけを行うことができる．これを**エンタングルメント・スペクトラム**と呼ぶ[29]．

第 4 章
共形場理論のエンタングルメント・エントロピー

本章では，場の理論の中でも特に共形場理論と呼ばれるクラスの理論におけるエンタングルメント・エントロピーの計算を紹介する．共形場理論の基礎的説明から始めて，まず 2 次元共形場理論の場合の解析を詳しく述べる [22]．その後で，高次元の共形場理論の場合に知られている結果をまとめる．共形場理論の知識のある読者は，4.3 節から読み始めてかまわない．

4.1　共形変換と共形場理論

共形変換 (conformal transformation) とは，時空の計量がスケール倍を除いて保たれる（言い換えると角度を保つ）座標変換のことである．良く知られているように，一般に座標変換 $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$ のもとで，計量は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right) g_{\alpha\beta}(x), \tag{4.1}$$

と変換する．この変換が特に，

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \tag{4.2}$$

の形になる場合が共形変換である．この共形変換全体がなす群を**共形群** (conformal group) と呼ぶ．共形変換で不変な場の理論を**共形場理論**（conformal field theory, 略して CFT）と呼ぶ [30], [31]．

もともとの時空が $d+1$ 次元ミンコフスキー (Minkowski) 時空である場合

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, d), \tag{4.3}$$

が最も重要であるので以下ではこの場合に限定する．微小変換

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x), \qquad \Lambda(x) = 1 - \lambda(x), \tag{4.4}$$

（ϵ^{μ} と $\lambda(x)$ が微小量）を考えると，(4.1) と (4.2) より

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \lambda(x)\eta_{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

を得る．まず両辺のトレースをとることで，$\lambda = \frac{2}{d+1}\partial_{\mu}\epsilon^{\mu}$ を得る．(4.5) の両辺に $\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ を作用させることで，

$$d \cdot \partial_{\mu}\partial^{\mu}\lambda = 0, \tag{4.6}$$

であることが分かる．さらに，

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}\partial_{\nu}\lambda &= \frac{2}{d+1}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\epsilon^{\alpha} \\
&= \frac{1}{d+1} \cdot \partial_{\nu}\partial^{\alpha}\left(-\partial_{\alpha}\epsilon_{\mu} + \lambda\eta_{\mu\alpha}\right) + \frac{1}{d+1} \cdot \partial_{\mu}\partial^{\alpha}\left(-\partial_{\alpha}\epsilon_{\nu} + \lambda\eta_{\nu\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{d+1}\left(-\eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\lambda + 2\partial_{\mu}\partial_{\nu}\lambda\right),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

あることから，(4.6) を用いると

$$(d-1)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\lambda = 0, \tag{4.8}$$

を得る．以上のことから $d \geq 2$ の場合，つまり 3 次元以上の共形変換は，

$$\epsilon_{\mu}(x) = a_{\mu} + b_{\mu\nu}x^{\nu} + c_{\mu\nu\rho}x^{\nu}x^{\rho}, \tag{4.9}$$

の形に限定される．$d = 1$ の場合は，(4.8) が自明になることから分かるように共形群は (4.9) よりも拡大する．実際に次節で説明するように $d = 1$ の場合は，共形群が無限次元となり，高次元の場合よりも強力な結果を導くことができる．本節の以下の内容では，どの次元でも成り立つ性質を説明する．

さらに，条件式 (4.5) から (4.9) のパラメーターは

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_{\mu\nu\rho}x^{\rho} + c_{\nu\mu\rho}x^{\rho}) \propto \eta_{\mu\nu}, \tag{4.10}$$

であることが要求される．

さて，共形変換の意味を具体的に考えてみよう．まず (4.9) において a_{μ} は (i) 座標を定数ずらす**並進変換** (translation) である．$b_{\mu\nu}$ は 2 種類あり，(ii) $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$ を満たす場合は**ローレンツ変換** (Lorentz transformation) であり，(iii) $b_{\mu\nu} \propto \eta_{\mu\nu}$ の場合は座標を等倍する**スケール変換** (dilatation) である．最後に，$c_{\mu\nu\rho}$ は，(4.10) より $c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}\tilde{c}_{\nu} + \eta_{\mu\nu}\tilde{c}_{\rho} - \eta_{\nu\rho}\tilde{c}_{\mu}$ の形に書け，(iv) **特殊共形変換** (special conformal transformation) と呼ばれる．

以上は微小変換として調べたが，有限の大きさの変換としては以下のように共形変換は表される：

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \text{並進}: x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu},\\
&(ii)\ \text{ローレンツ変換}: x'^{\mu} = M^{\mu}_{\nu} \cdot x^{\nu},\\
&(iii)\ \text{スケール変換}: x'^{\mu} = \Lambda^{-1/2} x^{\mu},\\
&(iv)\ \text{特殊共形変換}: x'^{\mu} = \tfrac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b^{\mu} x_{\mu} + b^2 x^2}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

演算子形式で共形変換の微小変換を表すと，生成子は以下のように書ける：

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \text{並進}: P_{\mu} = -i\partial_{\mu},\\
&(ii)\ \text{ローレンツ変換}: L_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}),\\
&(iii)\ \text{スケール変換}: D = -ix^{\mu}\partial_{\mu},\\
&(iv)\ \text{特殊共形変換}: K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - x^2\partial_{\mu}).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

これらの演算子は次の交換関係を満たす：

$$
\begin{aligned}
&[D, P_{\mu}] = iP_{\mu}, \quad [D, K_{\mu}] = -iK_{\mu},\\
&[K_{\mu}, P_{\nu}] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}),\\
&[K_{\rho}, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} K_{\nu} - \eta_{\rho\nu} K_{\mu}),\\
&[P_{\rho}, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} P_{\nu} - \eta_{\rho\nu} P_{\mu}),\\
&[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma}).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

また，これら全ての演算子を以下のように階数 $d+3$ の行列として表現することができる：

$$
J_{ab} = \begin{pmatrix} & & D & \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}) \\ & -D & & \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}) \\ \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}) & \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}) & & L_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{4.14}
$$

実際，この行列の交換関係は (4.13) を満たすことが確認でき，結果として (4.14) は，リー (Lie) 代数 $SO(2, d+1)$ の生成子と解釈できることが分かる．従って，$d+1$ 次元のミンコフスキー時空の共形群は $SO(2, d+1)$ であることが分かった．$L_{\mu\nu}$ の生成するローレンツ変換の群 $SO(1, d)$ は，この $SO(2, d+1)$ の部分群となっていることに注意．

すでに述べたように，これらすべての共形変換で理論が不変となる場の理論が共形場理論である．d 次元量子系の量子臨界点は，しばしば $d+1$ 次元の共形場理論で記述され，ある種の電子スピン鎖，重いフェルミオン系，そして銅酸化物高温超伝導体などの現実に存在する物質を記述していると思われている．

一般に計量が変換した時の作用の変分は，次のように定義される**エネルギー運動量テンソル** $T_{\mu\nu}$

$$
T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{4.15}
$$

を用いて[*1)]

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{4.16}$$

と書ける.

無限小の共形変換 (4.4) を考えると

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu = -\frac{2}{d+1}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho \epsilon^\rho. \tag{4.17}$$

従って，変分 (4.16) がゼロになるには，**エネルギー運動量テンソルのトレースがゼロ**

$$T^\mu_\mu = 0, \tag{4.18}$$

であればよいことが分かる[*2)]．まさに，この条件が共形場理論の定義とも言える．また，座標変換を忘れて純粋に計量を

$$g_{\mu\nu}(x) \to \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{4.19}$$

のように座標に依存してスケール倍する変換（ワイル変換）を施したとする．この場合に作用が不変になる条件も (4.18) であることに注意.

念のために補足すると (4.18) は運動方程式を課さなくても，つまりオフシェル (off-shell) で成り立つという意味である．一方，一般の座標変換に対する変分の場合は $\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu$ で，理論が座標変換で不変であることを要求するとエネルギー運動量テンソルの保存則

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{4.20}$$

が導かれる．これは運動方程式を課した時に成り立つ式，つまりオンシェル (on-shell) の性質である.

共形場理論の場から作られる演算子はすべて共形群の表現とみなされる．ある演算子が（$x^\mu = 0$ で）スケール変換 D の固有状態になっている場合に，その $-iD$ の固有値を**共形次元** (conformal dimension) と呼び Δ と書く．P_μ の作用は Δ を 1 だけ増やし，K_μ は 1 だけ減らす．そこで，K_μ でこれ以上減らない下限に相当する演算子を**プライマリー演算子** (primary operator) と呼ぶ．つまり K_μ を作用すると（$x^\mu = 0$ で）消える場をプライマリー演算子と呼ぶ．また，プライマリー演算子に P_μ などを掛けて次々と生成される場をディセン

---

*1)　T_{tt} がハミルトニアン密度を与えるコンベンションになっている.

*2)　共形変換の中でスケール変換に限定すると $\delta g_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ の定数倍になるので，$T^\mu_\mu = \partial_\nu J^\nu$ のように全微分の形で書けていれば $\delta S = 0$ となる．従ってこの議論だけでは，スケール変換だけを課しても (4.18) を示すことはできない．しかしながらより立ち入った解析をすることで，2 次元 ($d = 1$) では両者の等価性の証明が与えられている[32]．高次元についても同様の等価性が成り立つと予想されているが，現在のところ厳密な証明には至っていない[33].

ダント (descendant) と呼ぶ.

無限小共形変換のプライマリー演算子 $\mathcal{O}(x)$ への作用を書くと

$$
\begin{aligned}
&P_\mu \cdot \mathcal{O}(x) = -i\partial_\mu \mathcal{O}(x),\\
&L_{\mu\nu} \cdot \mathcal{O}(x) = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\mathcal{O}(x) + S_{\mu\nu}\mathcal{O}(x),\\
&D \cdot \mathcal{O}(x) = -ix^\mu\partial_\mu\mathcal{O}(x) - i\Delta\mathcal{O}(x),\\
&K_\mu \cdot \mathcal{O}(x) = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)\mathcal{O}(x) - (2i\Delta x_\mu + x^\nu S_{\mu\nu})\mathcal{O}(x),
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

である. $S_{\mu\nu}$ は演算子の内部スピンである. 共形場理論の作用が上の変換則で不変になるように要求して Δ が理論に現れる場に対して決まる. ユニタリーな理論では, 例えば $d+1$ 次元の共形場理論におけるスカラー演算子 $\mathcal{O}$ を考えるとその共形次元は

$$
\Delta \geq \frac{d-1}{2}, \tag{4.22}
$$

であることを示すことができる. この下限は自由場理論で実現されることが知られており, 実際に無質量スカラー場理論 $S \propto \int d^{d+1}x(\partial_\mu\varphi)^2$ では, スカラー場 φ の共形次元は運動量次元と一致し $\Delta = \frac{d-1}{2}$ であることはすぐに分かる.

有限の共形変換に拡張すると共形次元 Δ のプライマリー演算子 $\mathcal{O}$ は, 以下のように変換することが分かる：

$$
\mathcal{O}(x') = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{\frac{\Delta}{d+1}}\mathcal{O}(x). \tag{4.23}
$$

ここで $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$ は座標変換のヤコビアン（つまり行列 $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ の行列式）で, (4.2) の $\Lambda(x)$ を用いると $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \Lambda(x)^{(d+1)/2}$ に等しい.

また証明は略すが（文献 [31] などを参照）重要な結果として, 共形変換による不変性を用いると, 共形場理論の 2 点関数と 3 点関数の形が以下のように決定されることが分かる：

$$
\langle O_1(x_1)O_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}\cdot\delta_{\Delta_1,\Delta_2}}{|x_1-x_2|^{2\Delta_1}}, \tag{4.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle O_1(x_1)O_2(x_2)O_3(x_3)\rangle\\
&\quad = \frac{C_{123}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_2-x_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}|x_3-x_1|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

ここで, Δ_i はプライマリー演算子 O_i の共形次元である. C_{12} と C_{123} は定数である.

また次節で利用することになるのでワード・高橋 (Ward–Takahashi) 恒等式について説明しておきたい. 場の理論に対称性がある場合には, 一般にワード・高橋恒等式と呼ばれる関係式が成り立つ. 対称性に対応するカレントを $j^\mu(x)$

と書くと，その対称性に対するワード・高橋恒等式は

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu \langle j^\mu(x)\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle \\
&= -i\sum_{i=1}^{n}\delta^{d+1}(x-x_i)\langle\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots(\delta\mathcal{O}_i(x_i))\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

ここで δ は対称性の作用を表し，電荷 $Q=\int d^dxj^0(x)$ を用いて，$\delta\mathcal{O}(x)=i[Q,\mathcal{O}(x)]$ で与えられる．この式 (4.26) の証明は，以下のように与えられる．

まず，無限小の対称変換のパラメーター η を座標 x に依存するように拡張すると作用はもはや不変ではなく $\delta S=\int d^{d+1}x\partial_\mu j^\mu\eta(x)$ となることに着目する．次に，$\langle\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle$ の計算を経路積分法で考えると（今考えている場の理論の中の場を抽象的に ϕ と表している）

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle \\
&=\int[D\phi]\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\cdot e^{-S[\phi]}, \\
&=\sum_{i=1}^{n}\int[D\phi]\mathcal{O}_1(x_1)\cdots(\mathcal{O}_i(x_i)+\eta(x_i)\delta\mathcal{O}_i(x_i))\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\cdot e^{-S[\phi]-\delta S[\phi]}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

ここで 2 つ目の式から 3 つ目の式へは，経路積分する ϕ の汎関数のすべてを対称変換 $\phi\to\phi+\delta\phi$ しても結果は変わらないことを用いた（経路積分の測度が不変であることを仮定している）．最後に 2 つ目の式と 3 つ目の式の等価性から (4.26) が導かれる．

さて特にミンコフスキー時空における共形変換の場合にこの議論を適用する．まず並進変換 P_ν，ローレンツ変換 $L_{\nu\rho}$，スケール変換 D のカレントがそれぞれ以下のように与えられる：

$$
j^\mu_{[P_\nu]}=T^\mu_\nu,\quad j^\mu_{[L_{\nu\rho}]}=T^\mu_\nu x_\rho-T^\mu_\rho x_\nu,\quad j^\mu_{[D]}=T^\mu_\nu x^\nu. \tag{4.28}
$$

それぞれに対して (4.26) を考えることにより以下のワード・高橋恒等式を得る：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle T^\mu_\nu(x)\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle=-\sum_i\delta^{d+1}(x-x_i)\frac{\partial}{\partial x_i^\nu}\langle\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle, \\
&\langle(T^{\rho\nu}(x)-T^{\nu\rho}(x))\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle \\
&=-i\sum_i\delta^{d+1}(x-x_i)S_i^{\nu\rho}\langle\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle, \\
&\langle T^\mu_\mu(x)\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle=-\sum_i\delta^{d+1}(x-x_i)\Delta_i\langle\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

ここで $\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)$ をまとめて $\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)$ と書いた．$S_i^{\mu\nu}$ と Δ_i は $\mathcal{O}_i(x_i)$ の内部スピン演算子と共形次元．

4.2　2次元共形場理論

$d=1$ の場合，すなわち 2 次元共形場理論を考えると，無限小共形変換の条件 (4.5) は

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \partial_\alpha \epsilon^\alpha \eta_{\mu\nu}, \tag{4.30}$$

で与えられる．複素座標が $(z,\bar{z}) = (x_0 + ix_1, x_0 - ix_1)$ と定義されるユークリッド 2 次元平面 $\mathbf{R}^2$ 上の共形場理論を考えると (4.30) は $\bar{\partial}\epsilon = \partial\bar{\epsilon} = 0$ と書ける．ここで $\partial = \partial_z, \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}, \epsilon = \epsilon^z, \bar{\epsilon} = \epsilon^{\bar{z}}$ とおいた．従って，

$$\epsilon = \epsilon(z), \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{z}), \tag{4.31}$$

のように正則関数になることが分かった．これを有限の変換に拡張すると座標変換 $(z,\bar{z}) \to (w,\bar{w})$ が共形変換となる必要十分条件は

$$w = w(z), \quad \bar{w} = \bar{w}(\bar{z}), \tag{4.32}$$

という**正則写像で与えられる**．このように 2 次元では，高次元の場合と比べて共形変換の自由度がとても大きくなる．

特に共形変換 (4.32) のなかでも，

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad-bc=1), \tag{4.33}$$

で与えられる変換（a,b,c,d は定数）は大域的な共形変換と呼ばれる．この写像は，複素平面に無限遠を足して作った 2 次元球面 $\mathbf{S}^2$ 上で大域的に定義され，逆写像も存在する．群としては $SO(2,2) = SO(2,1) \times SO(2,1)$ の構造を持つ．実際この大域的な共形変換は，共形変換 (4.11) において $d=1$ としたものと一致する．一方，大域的ではない共形変換は局所的な共形変換と呼ばれ，これが存在するのが 2 次元共形場理論の高次元にはない特色であり，極めて強力な手法を与える．

無限小変換 $w = z + \epsilon(z)$ に対応する生成子を

$$l_n = -z^{n+1}\partial, \quad \tilde{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial}, \tag{4.34}$$

にとれる（n は任意の整数である）．この時，$(l_0, l_{\pm 1})$ と $(\tilde{l}_0, \tilde{l}_{\pm 1})$ が大域的な共形変換の生成子である．生成子 (4.34) は以下で与えられる古典的なビラソロ代数を満たす：

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}, \quad [\tilde{l}_n, \tilde{l}_m] = (n-m)\tilde{l}_{n+m}, \quad [l_n, \tilde{l}_m] = 0. \tag{4.35}$$

2 次元共形場理論において，プライマリー場の変換則は (4.23) を $d=1$ としたものとして得られ，複素座標で書くと以下で与えられる：

$$O'(w,\bar{w}) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^h \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right)^{\bar{h}} O(z,\bar{z}). \tag{4.36}$$

ここで $(h,\bar{h})$ を，$h+\bar{h}$ が共形次元 Δ となり，また $h-\bar{h}$ が $SO(2)$ 回転のスピン量子数を与えるように定義した．$h(\bar{h})$ を（反）カイラルな共形次元と呼ぶこともあり，無限小変換 $l_0(\tilde{l}_0)$ の固有値に相当する．

無限小共形変換 $w = z + \epsilon(z)$ に対して (4.36) は，以下で与えられる：

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \mathcal{O}(w,\bar{w}) &= \mathcal{O}'(w,\bar{w}) - \mathcal{O}(w,\bar{w}) \\ &= -\left[h(\partial\epsilon) + \epsilon\partial + \bar{h}(\bar{\partial}\bar{\epsilon}) + \bar{\epsilon}\bar{\partial}\right] \mathcal{O}(w,\bar{w}). \end{aligned} \tag{4.37}$$

さて次に無限小の共形変換 $\epsilon^\mu(x)$ に対する次の恒等式に着目する：

$$\partial_\mu(\epsilon_\nu T^{\mu\nu}) = \epsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{E}^{\alpha\beta}\partial_\alpha \epsilon_\beta \mathcal{E}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \tag{4.38}$$

ここで $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ は反対称テンソルで $\mathcal{E}_{01} = 1$ と定義される．式 (4.38) を任意の演算子積 $\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n) = \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)$ に作用させ，ワード・高橋恒等式 (4.29) を用いて右辺を書き換えると，右辺は丁度，先ほどの無限小共形変換 (4.37) で与えられることが分かる．従って次の関係式を得る：

$$\begin{aligned} &\delta_\epsilon \langle \mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle \\ &= \int d^2x \partial_\mu \langle \epsilon_\nu(x) T^{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle. \end{aligned} \tag{4.39}$$

右辺が全微分の積分で書かれているので，積分を半分実行すると

$$\begin{aligned} &\delta_\epsilon \langle \mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C dz \epsilon(z) \langle T(z)\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_C d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \tilde{T}(\bar{z})\mathcal{O}(x_1,\cdots,x_n)\rangle. \end{aligned} \tag{4.40}$$

ここで C は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ をすべて含む閉曲線とする．また正則・反正則なエネルギー運動量テンソル $T(z), \tilde{T}(\bar{z})$ を

$$T(z) = -2\pi T^{zz}(z), \qquad \tilde{T}(\bar{z}) = -2\pi T^{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}), \tag{4.41}$$

のように定義した．共形不変性の条件 (4.18) より $T^{z\bar{z}} = 0$ であることに注意．

このようにワード・高橋恒等式を用いると，共形変換をエネルギー運動量テンソルによる作用として (4.40) のように記述できる．演算子積展開（Operator Product Expansion, 略して OPE）の言葉で表現すると*3)

*3) 演算子積 $O_1(z_1)O_2(z_2)$ はもっと正確には $R[O_1(z_1)O_2(z_2)]$ の意味で R 積として定義される．R 積とは，$|z_1| > |z_2|$ のときに $R[O_1(z_1)O_2(z_2)] = O_1(z_1)O_2(z_2)$ で，$|z_1| < |z_2|$ のときは $R[O_1(z_1)O_2(z_2)] = O_2(z_2)O_1(z_1)$ とする規則で定義される．

$$
\begin{aligned}
T(z)\mathcal{O}(w,\bar{w}) &\sim \frac{h}{(z-w)^2}\mathcal{O}(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w \mathcal{O}(w,\bar{w}), \\
\tilde{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w,\bar{w}) &\sim \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\mathcal{O}(w,\bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}} \mathcal{O}(w,\bar{w}),
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

となる．実際に (4.42) を (4.40) に代入して留数積分をすると無限小共形変換 (4.37) が正しく得られることが分かる．

そこで簡単な具体例として無質量自由実スカラー場 φ と自由ディラック・フェルミオン場 $(\psi, \bar{\psi})$ を解析し，2 次元共形場理論の理解を深めたい．それぞれの作用は

$$
\begin{aligned}
S_\varphi &= \frac{1}{8\pi}\int d^2x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi = \frac{1}{2\pi}\int d^2x \partial\varphi\bar{\partial}\varphi, \\
S_\psi &= \frac{1}{\pi}\int d^2x (\bar{\psi}\bar{\partial}\psi + \tilde{\bar{\psi}}\partial\tilde{\psi}).
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

運動方程式を解くと

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \varphi(z) + \tilde{\varphi}(\bar{z}), \\
&\psi = \psi(z), \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}(z), \quad \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\bar{z}), \quad \tilde{\bar{\psi}} = \tilde{\bar{\psi}}(\bar{z}),
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

のように正則と反正則の部分に分かれる．以下では正則（カイラル）な場についてのみ書いて，反正則な場についての結果はほぼ同じなので省略することにする．

作用 (4.43) から導かれる基本的な演算子積展開 (OPE) は，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(z)\varphi(w) \sim -\log(z-w), \\
&\bar{\psi}(z)\psi(w) \sim \frac{1}{z-w}.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

エネルギー運動量テンソルは，それぞれ

$$
\begin{aligned}
T_\varphi &= -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2, \\
T_\psi &= \frac{1}{2}(\partial\bar{\psi})\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\partial\psi.
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

これらと場の OPE を (4.42) と比較することで，$\partial\varphi$ と $(\psi, \bar{\psi})$ の（カイラルな）共形次元がそれぞれ $h_{\partial\varphi} = 1$, $h_\psi = h_{\bar{\psi}} = \frac{1}{2}$ と求められる．同様に $e^{i\alpha\varphi}$ というプライマリー場の共形次元は $h_\alpha = \frac{\alpha^2}{2}$ であることも確かめられる．

さて，今後はエネルギー運動量テンソル同士の OPE を計算してみる．(4.46) の積を (4.45) によるウィック縮約することで計算でき，その結果は

$$
\begin{aligned}
T_\varphi(z)T_\varphi(w) &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T_\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_\varphi(w)}{z-w}, \\
T_\psi(z)T_\psi(w) &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T_\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_\psi(w)}{z-w}.
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

のようにどちらの場合も同じ OPE が得られる．(4.42) と比較すると，(4.47)

は，$T(z)$ が共形次元 $h=2$ を持つとすれば理解できるように見えるが，最初の $(z-w)^{-4}$ に比例する項だけは説明できない．この項が**中心電荷**（**セントラルチャージ**，**central charge**）と呼ばれる量子効果を表すのである．

一般の 2 次元共形場理論においてもエネルギー運動量テンソルの OPE は，

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}, \tag{4.48}$$

と書けることが示せる．この c が**中心電荷**（**セントラルチャージ**）である．中心電荷は一般に，共形場理論の自由度に比例していると考えられている．例えばもとの系の n 個のコピーからなる系を考えると c は n 倍される．

エネルギー運動量テンソルを z の冪級数で

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}, \tag{4.49}$$

のように展開すると (4.48) の OPE から，

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}, \tag{4.50}$$

といういわゆる**ビラソロ代数**が得られる．L_n をビラソロ生成子と呼び，共形変換の生成子とみなせる．反正則なセクターに関しても $\tilde{L}_n$ というビラソロ生成子が同様に構成できる．$(L_0, L_{\pm 1})$ と $(\tilde{L}_0, \tilde{L}_{\pm 1})$ が大域的な共形対称性に相当し，$SO(2,2) = SO(2,1) \times SO(2,1)$ の代数をなす．

前述の自由場理論の解析で実スカラー φ とディラック・フェルミオン $(\psi, \bar{\psi})$ の中心電荷はともに $c=1$ であることが分かる．一般には中心電荷が等しくても理論が同一の理論であるとは限らないが，今の自由場の例では両者は実は等価な理論とみなせる．もっと正しくは φ を半径 R に**コンパクト化**する，つまり

$$\varphi = \varphi + 2\pi R, \tag{4.51}$$

のように同一視することを考え，特に $R=1$ にとると実スカラー場理論とディラック・フェルミオンの理論は同一になる．この詳細は他書 [31] に譲るが，具体的に両者の対応は

$$\psi(z) = e^{i\varphi(z)}, \qquad \bar{\psi}(z) = e^{-i\varphi(z)}, \tag{4.52}$$

といういわゆる**フェルミオンのボソン化**の公式で与えられる．既に説明したように $e^{i\alpha\varphi}$ のカイラルな共形次元は $\alpha^2/2$ であり，(4.52) の両辺はともに共形次元が $1/2$ となっていることが確認できる．

さて一般論に戻って，(4.48) の OPE を用いると (4.40) の関係式よりエネルギー運動量テンソルの無限小共形変換を求めることができる：

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon T(w) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C dz\epsilon(z)T(z)T(w), \\ &= -\frac{c}{12}\partial^3\epsilon(w) - 2T(w)\partial\epsilon(w) - \epsilon(w)\partial T(w). \end{aligned} \tag{4.53}$$

このようにプライマリー演算子の変換則 (4.37) と比べて，中心電荷 c に比例する項が付け加わるのが特徴である．

この無限小変換 (4.53) を有限の変換にすると以下のように書けることが知られている：

$$T'(w) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 \cdot \left(T(z) - \frac{c}{12}\{w;z\}\right). \tag{4.54}$$

ここで $\{w;z\}$ は**シュワルツ微分**と呼ばれ

$$\{w;z\} = \frac{\partial_z^3 w}{\partial_z w} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_z^2 w}{\partial_z w}\right)^2, \tag{4.55}$$

で与えられる．実際，無限小変換 $w = z + \epsilon(z)$ に対して (4.55) は $\partial_z^3\epsilon(z)$ となり，(4.54) が (4.53) となることが簡単に確かめられる．

4.3 2 次元無質量自由場理論におけるエンタングルメント・エントロピー

2 次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピーは次節で解説するように一般論でもかなりのことが分かるが，その前にイメージをつかむために最も簡単な例として自由場理論における具体的な計算を説明したい [23]．自由場として無質量の複素スカラー場 Φ とディラック・フェルミオン場 $(\psi, \bar{\psi})$ を考える．

ユークリッド化された 2 次元空間 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ を考え，その複素座標を $(w, \bar{w})$ とする．部分系 A は,

$$u \le \mathrm{Re}\, w \le v, \quad \mathrm{Im}\, w = 0, \tag{4.56}$$

で与えられる長さ $v - u (\equiv l)$ の線分とする．3.1 節で説明したレプリカ法に従うと $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ は (3.11) の境界条件を満たす n 個のコピーを取った場（レプリカ場）によって定義される場の理論の分配関数と等しくなる．自由複素場（スカラーでもフェルミオンでも良い）の n 個のレプリカを $\phi^{(k)}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ と書くと，次のように離散的フーリエ変換をして $\tilde{\phi}^{(m)}$ $(m = 0, 1, \cdots, n-1)$ を定義する：

$$\tilde{\phi}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i m k/n} \phi^{(k)}. \tag{4.57}$$

この時 $w = u$ と $w = v$ の周りを一周した時の境界条件 (3.11) は,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{(m)}(e^{2\pi i}(w-u)) &= e^{2\pi i m/n} \tilde{\phi}^{(m)}(w-u), \\ \tilde{\phi}^{(m)}(e^{2\pi i}(w-v)) &= e^{-2\pi i m/n} \tilde{\phi}^{(m)}(w-v), \end{aligned} \tag{4.58}$$

のように対角化される．自由場理論を考えているのでラグランジアンは $\phi^{(k)}$ について 2 次で与えられ，$\sum_k |\phi^{(k)}|^2 = \sum_m |\tilde{\phi}^{(m)}|^2$ から分かるように $\tilde{\phi}^{(m)}$ の

ラグランジアンはもとの自由場理論のものと同じになる．従って $\tilde{\phi}^{(m)}$ の各 m のセクターはそれぞれ独立であり，違う m 同士の間に相互作用はない．

さて (4.58) のようにツイストされた境界条件は，**オービフォールド理論**を考えると自然に現れるものである．具体的には $\phi \to \phi \cdot e^{2\pi i/n}$ の作用で複素スカラー場の理論を同一視することで定義される $\mathbf{Z}_n$ オービフォールド理論を考えることになる．この記述を用いると，(4.58) の境界条件を課した場合の基底状態は，オービフォールド理論を考えて $w = u$ と $w = v$ のそれぞれに共形次元が最も小さい**ツイスト演算子** σ_m と $\bar{\sigma}_m (\equiv \sigma_{n-m})$ を挿入することと等価である．ツイスト演算子とは，その演算子が挿入されるとその周辺で場の境界条件が (4.58) のようにツイストされるものをいう．

例えば ϕ がディラック・フェルミオン ψ の場合は，ψ をボソン化して実スカラー場 φ と (4.52) の関係で等価であることを用いると，具体的に

$$\begin{aligned} \sigma_k(w,\bar{w}) &= e^{i\frac{k}{n}(\varphi(w)-\varphi(\bar{w}))}, \qquad (k \le n/2), \\ \sigma_k(w,\bar{w}) &= e^{i\frac{k-n}{n}(\varphi(w)-\varphi(\bar{w}))}, \qquad (k > n/2), \end{aligned} \tag{4.59}$$

と書ける．

実際に σ_k と ψ の OPE を (4.45) を用いて計算すると

$$\psi(w)\sigma_k(0) \propto w^{k/n}, \quad \psi(\bar{w})\sigma_k(0) \propto \bar{w}^{-k/n}, \tag{4.60}$$

となり，$w \to e^{2\pi i}w$ のように一周すると $\psi(w)$ と $\psi(\bar{w})$ はともに $e^{2\pi i k/n}$ の位相因子を確かに得る．

さて，$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ は，n 個のスカラー場を複素平面上に定義し，オービフォールドの境界条件 (4.58) を課した場合の分配関数であった．経路積分のユークリッド時間方向は無限に伸びているので基底状態を考えることになり，この分配関数は前述のとおりそれぞれのスカラー場に対するツイスト演算子の 2 点関数の積で書ける．従って，(4.24) を用いると

$$\mathrm{Tr}\rho_A^n = \prod_{k=0}^{n-1} \langle \sigma_k(u)\bar{\sigma}_k(v) \rangle \propto \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(v-u)^{2(h_k+\bar{h}_k)}}, \tag{4.61}$$

と計算できる．ここで $(h_k, \bar{h}_k)$ はツイスト演算子 σ_k の（反）カイラルな共形次元で具体的には以下のように与えられる．

$$\text{自由複素スカラー場} : h_k = \bar{h}_k = -\frac{k^2}{2n^2} + \frac{k}{2n}, \tag{4.62}$$

自由ディラック・フェルミオン場：

$$h_k = \bar{h}_k = \frac{k^2}{2n^2} \ \ (k \le n/2), \quad h_k = \bar{h}_k = \frac{(k-n)^2}{2n^2} \ \ (k > n/2). \tag{4.63}$$

特にディラック・フェルミオン場の結果は (4.59) より明らかであろう．スカラー場の方はツイストした境界条件によるゼロ点エネルギーを真面目に計算すると上の結果を得ることができるが詳細は略す．

このように与えられる h_k の k に対する和をとると

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_k = \frac{c}{24}\left(n - 1/n\right), \tag{4.64}$$

が導かれる．ここで c は**中心電荷**（セントラル・チャージ，central charge）であり，自由複素スカラー場は自由実スカラー場 2 つと等価なので $c=2$，自由ディラック・フェルミオン場は $c=1$ である．

このようにして部分系 A の長さを $l(=v-u)$ とすると

$$\mathrm{Tr}\rho_A^n \propto l^{-\frac{c}{6}(n-1/n)}, \tag{4.65}$$

が得られる. この式を n で微分して $n=1$ と置くというレプリカ法 (3.3) に従って S_A を求めると

$$S_A = \frac{c}{3}\log\frac{l}{\epsilon}, \tag{4.66}$$

と求められる．ϵ は紫外カットオフであり，連続極限では $\epsilon \to 0$ にとる．この ϵ 依存性は (4.65) の係数に隠れているが，S_A が $l=\epsilon$ でゼロになることと次元解析から (4.66) の形で入ることは自明である．この式 (4.66) は 2 次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピーにおいて最も重要で基本的な結果で，1994 年にホルゼイ–ラーセン–ウィルツェックによって見出された[34]. 以下でもたびたび登場する．

次節の一般論に進む前に，(4.66) をどのように利用するのか一例を紹介しよう．エンタングルメント・エントロピーは，与えられた量子多体系をコンピューターを用いて数値的に精度良く解析しようとする際の難易度の見積もりを与える．部分系 A を取り出して，それを記述する密度行列 ρ_A を求めたいとすると，ρ_A の行列としてのサイズ（階数），すなわち $\mathcal{H}_A$ の次元はとても大きい．

まず $1+1$ 次元量子系として例えば全長 L 個のスピン鎖を考えると，A のサイズも $O(L)$ とすると，$\dim\mathcal{H}_A \sim 2^L$ となる*4)．しかし，ρ_A の多くの固有値はほぼゼロになっており，非自明な固有値だけを取り出すと思うと，$1+1$ 次元系の実効的な ρ_A のサイズは，

$$e^{S_A} \sim L^{c/3} \tag{4.67}$$

まで圧縮される．$L=100$ とし，イジング模型 $c=1/2$ を例にとると，(4.67) で見積もられる実効的なサイズは，2.15... と $\dim\mathcal{H}_A = 2^{100}$ と比べて極めて小さく，数値計算も容易であることが分かる．

しかしながら $d+1$ 次元 $(d>1)$ では，面積則 (3.21) から $S_A \sim L^{d-1}$ と振る舞うので，ρ_A の実効的なサイズは

$$e^{S_A} \sim e^{L^{d-1}} \tag{4.68}$$

*4) 連続極限との関係は $l = L\epsilon$ で与えられることに注意．

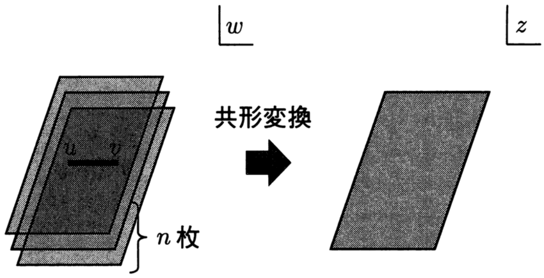


図 4.1　Σ_n から $\mathbf{R}^2$ への共形変換 (4.69).

となりとても大きくなってしまう．このことからも量子臨界点の数値計算が高次元になるとはるかに難しくなることが分かる．

4.4　2次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーの一般論

さてそれでは本節では2次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーの一般的な計算を説明する．出発点となるのは $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ が (3.10) のように n 枚のシートからなる2次元曲面 Σ_n 上の分配関数として計算されるという事実である．部分系 A は (4.56) のようにとる．2次元共形変換の無限次元の自由度を生かし，以下のような共形変換

$$z^n = \frac{w-u}{w-v}, \tag{4.69}$$

で新しい座標系 $(z, \bar{z})$ へ移ると単なる2次元平面 $\mathbf{R}^2$ が得られる[21]（図 4.1 参照）．

このときエネルギー運動量テンソルの期待値は (4.54) に従って以下のように変換する：

$$\begin{aligned}\langle T'(w)\rangle_{\Sigma_n} &= \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 \cdot \left(\langle T(z)\rangle_{\mathbf{R}^2} - \frac{c}{12}\{w;z\}\right)\\ &= \frac{c}{24}(1-n^{-2})\cdot\frac{(v-u)^2}{(w-u)^2(w-v)^2}.\end{aligned} \tag{4.70}$$

ここで $\langle T(z)\rangle_{\mathbf{R}^2}=0$ であることを用いた．

一方 Σ_n 上の場 ϕ の理論を $\mathbf{R}^2$ 上で定義される n 個のレプリカ場 $\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(n)}$ の理論と思うことができる．後者では境界条件 (3.11) が課されているが，これをツイスト演算子 σ_n と $\bar{\sigma}_n$ を $w=u,v$ に挿入することと等価だと思える．$\phi^{(j)}$ に対するエネルギー運動量テンソルを $T^{'(j)}(w)$ と書くとすると (4.70) から

$$\frac{\langle T^{'(j)}(w)\sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2}}{\langle\sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2}} = \frac{c}{24}(1-n^{-2})\cdot\frac{(v-u)^2}{(w-u)^2(w-v)^2}, \tag{4.71}$$

が分かる（j は任意）．ここで (4.70) の $T'(w)$ は n 枚のシートのどれか一枚に挿入されており，レプリカ場の言葉に直すと $\phi^{(1)}, \cdots, \phi^{(n)}$ のうちどれか一つの場の寄与のみ取り入れている．従って，系全体のエネルギー運動量テンソル $T'(w) = \sum_{j=1}^{n} T'^{(j)}(w)$ に対する結果は (4.71) を n 倍すればよい．

$$\frac{\langle T'(w)\sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2}}{\langle \sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2}} = \frac{c}{24}\left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{(v-u)^2}{(w-u)^2(w-v)^2}. \tag{4.72}$$

特に $w \to u$ もしくは $w \to v$ の極限をとって (4.42) と比較することでツイスト演算子 σ_n の共形次元が

$$h = \bar{h} = \frac{c}{24}\left(n - \frac{1}{n}\right), \tag{4.73}$$

と求まる．実際 (4.72) はプライマリー演算子に対する共形変換のワード・高橋恒等式

$$\begin{aligned}&\langle T(w)\sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2}\\ &= \left(\frac{h}{(w-u)^2} + \frac{1}{w-u}\partial_u + \frac{h}{(w-v)^2} + \frac{1}{w-v}\partial_v\right)\langle \sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2},\end{aligned} \tag{4.74}$$

を満たすことが確認できる．この式 (4.74) は (4.40) において $\epsilon(z) = \frac{1}{z-w}$ と置き (4.37) の変換則を用いることで導出できる．

以上より $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を

$$\mathrm{Tr}\rho_A^n = \langle \sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}^2} = \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{-2(h+\bar{h})} = \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{-\frac{c}{6}\left(n-\frac{1}{n}\right)}, \tag{4.75}$$

と求めることができ [21]，結果は (4.65) を確かに再現する．従って，エンタングルメント・エントロピーは (4.66) で与えられることが確かめられた．

また，エンタングルメント・エントロピーの一般化であるレンニ・エントロピー (2.19) も，(4.75) から以下のように計算される．

$$S_A^{R(q)} = \frac{c}{6}\left(1 + \frac{1}{q}\right)\log\frac{l}{\epsilon}. \tag{4.76}$$

特に $q = 1$ にとると (4.66) に一致する．

さて，さらに共形変換を行うことで他の場合のエンタングルメント・エントロピーも計算できる．これまでは無限に長い 1 次元空間の中の部分系 A を考えてきたが，長さ l_{tot} の円周上で定義される共形場理論を考え，その中の長さ l の線分を A とする場合を考えてみよう．前者の無限系（座標 w'）から後者の円周上の系（座標 w）へは次の共形変換で移ることができる：

$$w' = \tan\left(\frac{\pi w}{l_{tot}}\right). \tag{4.77}$$

確かに，この時に $0 \leq \mathrm{Re}\, w \leq l_{tot}, -\infty < \mathrm{Im}\, w < \infty$ の値を w がとり，Re

w は円周 $\mathbf{S}^1$，そして $\mathrm{Im}\, w$ はユークリッド化した時間と解釈できる．この共形変換で 2 点関数 (4.75) は (4.36) に従って次のように変換する：

$$
\begin{aligned}
&\langle \sigma_n(u)\bar{\sigma}_n(v)\rangle_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}^1} \\
&= \left(\frac{l_{tot}}{\pi}\cos\left(\frac{\pi u}{l_{tot}}\right)\cos\left(\frac{\pi v}{l_{tot}}\right)\right)^{-\frac{c}{6}(n-1/n)} \cdot \langle \sigma_n(u')\bar{\sigma}_n(v')\rangle_{\mathbf{R}^2} \\
&= \left(\frac{l_{tot}}{\pi\epsilon}\sin\left(\frac{\pi l}{l_{tot}}\right)\right)^{-\frac{c}{6}(n-1/n)}.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

ここで $u' = \tan\left(\frac{\pi u}{l_{tot}}\right), v' = \tan\left(\frac{\pi v}{l_{tot}}\right)$ とした．円周上での A の線分の長さは $l = v - u$ である．

従ってレプリカ法 (3.3) を用いて円周上のエンタングルメント・エントロピーは

$$
S_A = \frac{c}{3}\log\left(\frac{l_{tot}}{\pi\epsilon}\sin\left(\frac{\pi l}{l_{tot}}\right)\right), \tag{4.79}
$$

と求められる [21]．例えば $l \to l_{tot} - l$ としても S_A が不変なことから $S_A = S_B$ の恒等式 (2.25) を確認できる．

また有限温度 T の共形場理論の場合の計算を考えてみよう．空間は無限に伸びる直線とし，ユークリッド時間方向が長さ $\beta = T^{-1}$ の円周になっている．部分系 A は長さ l の線分とする．この場合は，

$$
w = e^{\frac{2\pi}{\beta}w'}, \tag{4.80}
$$

という共形変換を用いればよい．計算は円周の場合と類似しているので，結果だけを書くとエンタングルメント・エントロピーは

$$
S_A = \frac{c}{3}\log\left(\frac{\beta}{\pi\epsilon}\sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right)\right), \tag{4.81}
$$

と求められる [21]．特に高温極限を取ると

$$
S_A \simeq \frac{c}{3}\log\frac{\beta}{2\pi\epsilon} + \frac{\pi}{3}clT, \tag{4.82}
$$

となり右辺の 2 つ目の項は，通常の部分系 A の内部の熱力学的エントロピーに相当する．この結果からわかるように混合状態のエンタングルメント・エントロピーには量子エンタングルメントからの寄与と熱力学のように古典的なエントロピーの寄与の両方が入ってくる．

共形場理論ではなく，ギャップがある（有質量な）場の理論の場合は S_A の計算は一般に大変複雑になる．しかしながら 2 次元の場合は，比較的容易に一般的な性質を導くことができる．これを説明するために，部分系 A の長さを l として，$l \gg \xi$ の極限を考えてみよう（ξ は相関長で質量 m と $\xi \sim 1/m$ の関係にある）．この赤外極限（低エネルギー極限）では，部分系が相関長より大きいので S_A は l に依存しなくなると期待される．一方，紫外発散は m の値によらず，必ず $S_A \sim \frac{c}{3}\log\epsilon^{-1}$ の形になる．従って，S_A は長さの次元を持たない

量なので，

$$S_A = \frac{c}{3}\log\frac{\xi}{\epsilon}, \tag{4.83}$$

となることは明らかである．S_A の寄与は線分 A の両端点からの寄与に二等分できるので，1 つの境界点からの寄与は (3.22) で与えられることが分かる．量子 1 次元系における境界 ∂A の面積を ∂A の点の数と解釈すると，面積則が成り立っていることに注意しよう．

4.5 有限温度・有限サイズの 2 次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピー

既に見たように，2 次元共形場理論では共形対称性が強力なのでエンタングルメント・エントロピーに関しても一般的な結果が多く得られる．しかしながら，有限温度かつ有限サイズの 2 次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピーは共形対称性だけでは決定できない*5)．その理由は結果が理論に含まれる演算子のスペクトラムに依存するからである．

そこで，この計算が最も簡単になる自由で無質量なディラック・フェルミオン ψ を例にとって具体的な計算を説明したい[35]．本節の内容自体は本書の後の内容を読むのに必要不可欠なものではないので，時間がない読者は読み飛ばしても差し支えない．ユークリッド化して扱うと，有限温度 T で有限サイズの系は 2 次元トーラス $\mathbf{T}^2$ 上の場の理論として表される．共形対称性があるので片方の辺の長さを 1 として，もう片方を $\beta = 1/T$ とする．複素座標 $(z, \bar{z})$ を用いると

$$z \sim z+1, \quad z \sim z+\tau, \quad (\tau = i\beta), \tag{4.84}$$

の同一視でトーラスは定義される．

基本的に以下の計算は，ディラック・フェルミオンが半径 $R=1$ にコンパクト化された自由無質量スカラー場に (4.52) のようにボソン化できることを用いて行う．例えば 1 ループの分配関数 $Z_{bos}(R)$ は以下のように変換できる：

$$\begin{aligned} Z_{bos}(R=1)\cdot|\eta(\tau)|^2 &= \sum_{n,w} q^{\frac{(n+w/2)^2}{2}} \bar{q}^{\frac{(n-w/2)^2}{2}} \\ &= \frac{|\theta_2(0|\tau)|^2 + |\theta_3(0|\tau)|^2 + |\theta_4(0|\tau)|^2}{2}. \end{aligned} \tag{4.85}$$

ここで $\eta(\tau)$ と $\theta_\nu(z|\tau)$ は，2 次元共形場理論で良く使われる η 関数と θ 関数であり，次のように定義される（$q = e^{2\pi i\tau}$ である）：

*5) 同様に共形対称性だけでは決定できない例として，絶対零度で無限に長い系であっても部分系 A が複数の線分からなる場合が挙げられる[36],[37]．この場合も自由フェルミオン場の場合を除くと計算が大変複雑である．

$$
\begin{aligned}
\eta(\tau) &= q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\\
\theta_1(z|\tau) &= 2\sin(\pi z)q^{1/8}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-e^{2\pi iz}q^n)(1-e^{-2\pi iz}q^n),\\
\theta_2(z|\tau) &= 2\cos(\pi z)q^{1/8}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+e^{2\pi iz}q^n)(1+e^{-2\pi iz}q^n),\\
\theta_3(z|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+e^{2\pi iz}q^{n-1/2})(1+e^{-2\pi iz}q^{n-1/2}),\\
\theta_4(z|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-e^{2\pi iz}q^{n-1/2})(1-e^{-2\pi iz}q^{n-1/2}).
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

このように $Z_{bos}(R)$ はそれぞれ θ_ν $(\nu = 2,3,4,1)$ の 4 つのセクターの和に対応する（$\theta_1(0|\tau) = 0$ に注意）．それぞれの和は，Tr_R, Tr_{NS}, $\mathrm{Tr}_{NS}(-1)^F$, $\mathrm{Tr}_R(-1)^F$ という分配関数に対応する．NS と R は，それぞれフェルミオンが反周期的と周期的になる境界条件を表し，F はフェルミオン数を意味する．

プライマリー演算子 $O_{(n,w)}$ を（スカラー場の）運動量 n，巻きつき数 w を生成する演算子とすると，

$$
O_{(n,w)}(z,\bar{z}) = e^{i\left(\frac{n}{R}+\frac{wR}{2}\right)\varphi(z)+i\left(\frac{n}{R}-\frac{wR}{2}\right)\varphi(\bar{z})},
\tag{4.87}
$$

で定義され，その共形次元は $\Delta_{n,w} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{R}+\frac{wR}{2}\right)^2$ と $\bar{\Delta}_{n,w} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{R}-\frac{wR}{2}\right)^2$ で与えられる．この演算子の 2 点関数は以下のように求められる [31]：

$$
\begin{aligned}
&\langle O_{(n,w)}(z,\bar{z})\ O_{(-n,-w)}(0,0)\rangle =\\
&\left(\frac{2\pi\eta(\tau)^3}{\theta_1(z|\tau)}\right)^{2\Delta_{n,w}}\overline{\left(\frac{2\pi\eta(\tau)^3}{\theta_1(z|\tau)}\right)}^{2\bar{\Delta}_{n,w}}\frac{\sum_{m,l}q^{\Delta_{m,l}}\bar{q}^{\bar{\Delta}_{m,l}}e^{4\pi i(\alpha_{n,w}\alpha_{m,l}z-\bar{\alpha}_{n,w}\bar{\alpha}_{m,l}\bar{z})}}{\sum_{m,l}q^{\Delta_{m,l}}\bar{q}^{\bar{\Delta}_{m,l}}},
\end{aligned}
\tag{4.88}
$$

ここで $\alpha_{n,w} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{R}+\frac{Rw}{2}\right)$ と $\bar{\alpha}_{n,w} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{R}-\frac{Rw}{2}\right)$ とした．

エンタングルメント・エントロピーを定義する部分系 A をある時間における長さ L の線分にとる．定義から $0 < L < 1$ である．次に，自然数 N に対して $\mathrm{Tr}(\rho_A)^N$ を計算する．これが解析的に求められれば N に関して解析接続し，(3.3) を用いて S_A が決定できる．

$\mathrm{Tr}(\rho_A)^N$ は，ツイスト演算子の 2 点関数の積として以下のように計算できる：

$$
\mathrm{Tr}(\rho_A)^N = \prod_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\langle\sigma_k(L,L)\sigma_{-k}(0,0)\rangle.
\tag{4.89}
$$

式 (4.59) のようにツイスト演算子 σ_k は $O_{(0,\frac{2k}{N})}$ に取れば良い．その理由は，フェルミオン $\psi = e^{i\varphi}$ が $O_{(0,\frac{2k}{N})}$ の周りを一周すると $e^{\frac{2\pi ik}{N}}$ の位相因子がか

かるからであったことを思い出そう．また計算の便宜上，N を奇数と仮定し，$k=-(N-1)/2,-(N-3)/2,\cdots,(N-1)/2$ に選んだ．

このようにして 2 点関数 (4.88) は，$\nu=2,3,4$ のセクターに関して以下のように求められる：

$$\langle\sigma_k(z,\bar{z})\sigma_{-k}(0,0)\rangle_\nu=\left|\frac{2\pi\eta(\tau)^3}{\theta_1(L|\tau)}\right|^{4\Delta_k}\cdot\frac{\left|\theta_\nu\left(\frac{kL}{N}|\tau\right)\right|^2}{|\theta_\nu(0|\tau)|^2}. \tag{4.90}$$

ここで $\Delta_k=\frac{k^2}{2N^2}$ は σ_k の共形次元である．

さて，エンタングルメント・エントロピー S_A は，(4.89) を (4.90) を用いて評価し，最後に (3.3) に従って計算できる．結果を分かりやすく述べるために

$$S_A=S_1+S_2, \tag{4.91}$$

のように分割する．S_1 は (4.90) の最初の因子から来る寄与，S_2 は 2 つ目の因子からの寄与とする．

S_1 は N の依存性が共形次元の和 $\sum_k\Delta_k=\frac{1}{24}(N-1/N)$ のみから来るので計算が容易である：

$$S_1=\frac{1}{3}\log\left|\frac{\theta_1(L|\tau)}{2\pi\eta(\tau)^3}\right|. \tag{4.92}$$

低温展開で具体的に表すと

$$S_1=\frac{1}{3}\log\left|\frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi L)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-e^{2\pi iL}q^m)(1-e^{-2\pi iL}q^m)}{(1-q^m)^2}\right|. \tag{4.93}$$

ここで $q=e^{-2\pi\beta}$ とした．高温展開はモジュラー変換 $(\tau\to-1/\tau)$ を施すことで得られる：

$$S_1=\frac{1}{3}\log\left|\frac{\beta}{\pi}\cdot e^{-\frac{\pi L^2}{\beta}}\cdot\sinh\left(\frac{\pi L}{\beta}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-e^{2\pi L/\beta}\tilde{q}^m)(1-e^{-2\pi L/\beta}\tilde{q}^m)}{(1-\tilde{q}^m)^2}\right|.$$

ここで $\tilde{q}=e^{-\frac{2\pi}{\beta}}$ とした． $S_1(L)=S_1(1-L)=S_1(1+L)$ が成り立つことに注意．

次に，S_2 は以下のように書ける：

$$S_2=-\frac{\partial}{\partial N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\log\left|\frac{\theta_\nu\left(\frac{kL}{N}|\tau\right)}{\theta_\nu(0|\tau)}\right|^2\Bigg|_{N=1}. \tag{4.94}$$

最終的に S_A を求めるために N に関する解析接続を行うには，k の和を遂行する必要がある．そこで (4.94) の log 関数のテイラー展開 $\log(1+x)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}x^l$ を行い和をとることにする．

まず $\nu=3$ の場合 (Tr_{NS}) に計算を行う．S_2 を高温展開で計算することを考えて以下の恒等式

$$\frac{\theta_3(z|\tau)}{\theta_3(0|\tau)} = e^{-i\pi z^2/\tau}\cdot\frac{\theta_3(\frac{z}{\tau}|-\frac{1}{\tau})}{\theta_3(0|-\frac{1}{\tau})}, \tag{4.95}$$

を用いてモジュラー変換 $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ を行うと，

$$S_2 = -\frac{\partial}{\partial N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\left[-2\pi\frac{k^2L^2}{\beta N^2}\right]\Bigg|_{N=1} + \tilde{S}_2 = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{L^2}{\beta} + \tilde{S}_2. \tag{4.96}$$

ここで $\tilde{S}_2$ は以下で与えられる：

$$\begin{aligned}\tilde{S}_2 &= -2\frac{\partial}{\partial N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\log Q(k,m)\Bigg|_{N=1}\\ &= -8\frac{\partial}{\partial N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\cdot\sinh^2\left(\frac{\pi kLl}{N\beta}\right)e^{-2\pi(m-1/2)\frac{l}{\beta}}\Bigg|_{N=1}\\ &= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\left[\frac{2\pi Ll}{\beta}\coth\left(\frac{\pi Ll}{\beta}\right)-2\right]\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right)}.\end{aligned} \tag{4.97}$$

ここで，

$$Q(k,m) = \frac{(1+e^{2\pi\frac{kL}{N\beta}}e^{-2\pi(m-1/2)/\beta})(1+e^{-2\pi\frac{kL}{N\beta}}e^{-2\pi(m-1/2)/\beta})}{(1+e^{-2\pi(m-1/2)/\beta})^2}, \tag{4.98}$$

を定義した．またこの計算で次の公式を用いた．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N}\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sinh^2\left(\frac{\alpha k}{N}\right)\Bigg|_{N=1} &= \frac{\partial}{\partial N}\left[-\frac{N}{2}+\frac{e^{\frac{(1-N)\alpha}{N}}-e^{\frac{(N+1)\alpha}{N}}}{2(1-e^{\frac{2\alpha}{N}})}\right]\Bigg|_{N=1}\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\coth\alpha.\end{aligned}$$

まとめると S_A を高温展開の表式として以下の結果が得られた（紫外カットオフ ϵ を明示した）[35]：

$$\begin{aligned}S_A =\ &\frac{1}{3}\log\left[\frac{\beta}{\pi\epsilon}\sinh\left(\frac{\pi L}{\beta}\right)\right]+\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\log\left[\frac{(1-e^{2\pi\frac{L}{\beta}}e^{-2\pi\frac{m}{\beta}})(1-e^{-2\pi\frac{L}{\beta}}e^{-2\pi\frac{m}{\beta}})}{(1-e^{-2\pi\frac{m}{\beta}})^2}\right]\\ &+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\cdot\frac{\frac{\pi Ll}{\beta}\coth\left(\frac{\pi Ll}{\beta}\right)-1}{\sinh\left(\pi\frac{l}{\beta}\right)}.\end{aligned} \tag{4.99}$$

この結果を図 4.2 にプロットした．

式 (4.99) の最初の因子 $\frac{1}{3}\log\left[\frac{\beta}{\pi\epsilon}\sinh\left(\frac{\pi L}{\beta}\right)\right]$ は，前節で既に説明した無限サイズの有限温度での 2 次元共形場理論の一般的な結果 (4.81) を再現している．

また $\delta = 1 - L \to 0$ の極限を取ると

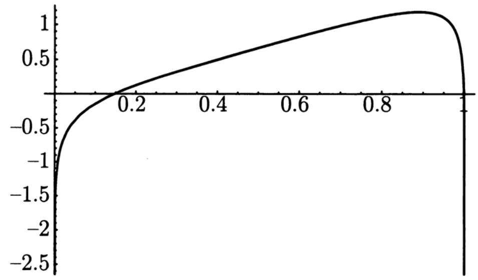


図 4.2 有限温度，有限サイズの自由無質量ディラック・フェルミオン系の S_A を A の幅 L の関数としてプロットしたもの． $\beta = 0.6$ とした．また S_A の紫外発散は $a = \frac{1}{2\pi}$ と置くことで差し引いた．(文献 [35] より．)

$$S_A(L = 1-\delta) = \frac{1}{3}\log\frac{\delta}{\epsilon} + \frac{\pi}{3\beta} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\left[\frac{2\pi l}{\beta}\coth\left(\frac{\pi l}{\beta}\right) - 2\right]\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right)},$$

となるので，部分系 A が系全体になる極限で S_A を計算してから発散部分を以下のように差し引くと

$$\begin{aligned} S_A(1)_{\text{有限}} &\equiv \lim_{\delta\to 0}\left(S_A(1-\delta) - S_A(\delta)\right) \\ &= \frac{\pi}{3\beta} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\left[\frac{2\pi l}{\beta}\coth\left(\frac{\pi l}{\beta}\right) - 2\right]\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi l}{\beta}\right)}, \end{aligned} \tag{4.100}$$

という有限の値が得られる．

一方，系全体の熱力学的エントロピー $S_{\text{熱力学}}$ を自由エネルギー $F = -\beta^{-1}\log Z$ より計算すると

$$\begin{aligned} S_{\text{熱力学}} &= -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}[-\beta^{-1}\log Z] \\ &= \frac{\pi}{3\beta} + 4\sum_{m=1}^{\infty}\log(1 + e^{-\frac{2\pi}{\beta}(m-\frac{1}{2})}) - \frac{8\pi}{\beta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m-\frac{1}{2}}{e^{\frac{2\pi}{\beta}(m-\frac{1}{2})}+1}, \end{aligned} \tag{4.101}$$

となる．ここで分配関数 Z は以下のように定義される：

$$Z = \frac{|\theta_3(0|\tau)|^2}{|\eta(\tau)|^2} = \frac{|\theta_3(0|-\tau^{-1})|^2}{|\eta(-\tau^{-1})|^2} = e^{\frac{\pi}{6\beta}}\prod_{m=1}^{\infty}(1 + e^{-\frac{2\pi}{\beta}(m-\frac{1}{2})})^4.$$

さて少し式をいじると (4.100) と (4.101) が等しいことが証明できる．つまり次の関係式を証明したことになる：

$$\lim_{|B|\to 0}(S_A - S_B) = S_{\text{熱力学}}. \tag{4.102}$$

ここで $|B|$ は B のサイズの意味であり，B の補集合である A は $|B| = 0$ の時には系全体に等しくなる．

以上は高温展開を説明したが，モジュラー変換 (4.95) をせずに同様の計算を行うと低温展開の表式が得られる：

$$S_A = \frac{1}{3}\log[\frac{1}{\pi a}\sin(\pi L)] + \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\log\left[\frac{(1-e^{2\pi iL}e^{-2\pi\beta m})(1-e^{-2\pi iL}e^{-2\pi\beta m})}{(1-e^{-2\pi\beta m})^2}\right]$$
$$+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\cdot\frac{1-\pi lL\cot(\pi Ll)}{\sinh(\pi l\beta)}. \tag{4.103}$$

ゼロ温度の極限を取ると，(4.103) は 2 次元共形場理論で良く知られた一般公式 (4.79) つまり $S_A = \frac{c}{3}\log\left[\frac{1}{\pi a}\sin(\pi L)\right]$ を再現する．

以上は $\nu = 3$（NS セクター）に関して結果を述べたが，他のセクターの場合 $\nu = 2, 4$ についても同様に計算できる．S_1 は $\nu = 3$ と同じで，S_2 のみが変わる．結果だけを述べると $\nu = 2$ の場合 (Tr_R) は (4.97) の $\tilde{S}_2$ を

$$\tilde{S}_2 = 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{\frac{\pi Ll}{\beta}\coth\frac{\pi Ll}{\beta}-1}{\sinh\frac{\pi Ll}{\beta}}, \tag{4.104}$$

で置き換えた式で与えられる．また $\nu = 4$ の場合 ($\mathrm{Tr}_{NS}(-1)^F$) は，以下で与えられる，

$$\tilde{S}_2 = -\frac{\pi L}{\beta} + 2\log 2 + 4\pi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-)^l\cdot L}{\beta(e^{\frac{2\pi lL}{\beta}}-1)} + 4\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-)^l}{l}\cdot\frac{\frac{\pi Ll}{\beta}\coth\frac{\pi Ll}{\beta}-1}{e^{\frac{2\pi l}{\beta}}-1}.$$

また両者の場合ともに (4.102) は $\nu = 3$ の時と同様に成立する．

4.6 2次元共形場理論における c 定理とエンタングルメント・エントロピー

2 次元共形場理論において中心電荷 c は自由度の目安を与える重要な量であり，実際に前節で見た例ではエンタングルメント・エントロピーが c に比例している．共形場理論は長さのスケールによらない理論であるが，この理論に質量を与える，すなわちエネルギーギャップを与える変形を考えることができる．一般にこのような操作はレレバント (relevant) な変形と呼ばれ，共形次元が $h < 1, \bar{h} < 1$ を満たす演算子 $\mathcal{O}$ で作用を摂動すること

$$S \to S + \int d^2x\mathcal{O}(x), \tag{4.105}$$

に対応する．繰りこみ群の意味で低エネルギーに行くとこの摂動の効果は大きくなり，低エネルギー極限では別の共形場理論に近づくと思われる．例えば有質量な自由場理論では，低エネルギー極限（赤外極限）では自由度が皆無となり $c = 0$ の自明な理論に近づくことになる．この繰りこみ群の考え方をすると高エネルギー極限（紫外極限）つまり出発点の共形場理論と，赤外極限の共形場理論では前者の方が自由度が大きいと考えるのが自然で，中心電荷も前者の

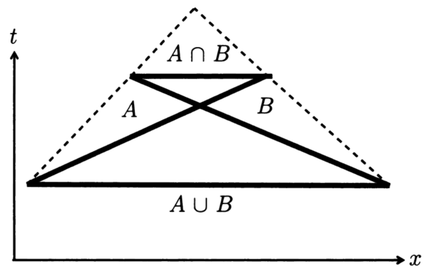


図 4.3 2 次元の c 定理のエンタングルメント・エントロピーを用いた証明に用いるセットアップ．太い線が部分系，点線で書かれた三角形が光円錐を表す．

ほうが大きいことが期待される．

$$c_{紫外} \geq c_{赤外}. \tag{4.106}$$

さらに進んで中間領域でも長さスケールの関数として中心電荷を拡張したもの（c 関数と呼ばれる）が定義できれば，長さスケールの関数として単調減少

$$\frac{dc(l)}{dl} \leq 0, \tag{4.107}$$

すると期待できる．ここで $l = 0$ が紫外極限，$l = \infty$ が赤外極限である．この不等式 (4.107) は c 定理と呼ばれ，ザモロドチコフによって証明されている [38]．

しかし実はエンタングルメント・エントロピーの強劣加法性を用いると，c 定理をより簡単に証明できるので以下ではその方法を説明したい．ローレンツ変換で不変な任意の 2 次元場の理論を考える（共形場理論である必要はない）．このとき部分系 A と B を図 4.3 のようにとる．すなわち空間的な線分 A,B の両端点をそれぞれ (A_1, A_2) と (B_1, B_2) とすると，A_1 と B_1 そして A_2 と B_2 がそれぞれ別の光線（ヌル測地線）にのっているとする．部分系 A,B はもはや時間 t 一定面にのっていないが，それぞれ適当にローレンツ変換（ブースト）することで時間一定面にのせることができるので，対応するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ が定義できる．

情報が光の速さより早く伝わることはない事実を思い出すと，$\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B$ と $\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$ に相当する部分系 $A \cup B$ と $A \cap B$ は図 4.3 のようにとれる．つまりそれぞれ端点が (A_1, B_2) と (B_1, A_2) で与えられる線分に対応する．このとき A のローレンツ不変な長さを $l(A)$ などと書くとすると

$$l(A) \cdot l(B) = l(A \cup B) \cdot l(A \cap B), \tag{4.108}$$

が成立する．特に $l(A) = l(B)$ の場合を考え

$$l(A) = l(B) = e^{\frac{a+b}{2}}, \quad l(A \cup B) = e^a, \quad l(A \cap B) = e^b, \tag{4.109}$$

とおくと強劣加法性 (2.27) よりエンタングルメント・エントロピーは

$$2S_{ent}\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq S_{ent}(a) + S_{ent}(b), \tag{4.110}$$

を満たすことが分かる．ここで今考えているエンタングルメント・エントロピーは部分系の長さ $l = e^x$ にのみ依存するので $S_{ent}(x)$ のように書いている．この不等式 (4.110) は $S_{ent}(x)$ が上に凸（もしくは下に凹，concave）であることを意味するので，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{ent}(x) \leq 0, \tag{4.111}$$

であることが示せる．

さて，2 次元共形場理論ではエンタングルメント・エントロピーが (4.66) で与えられることを思い出すと c 関数として

$$c(x) = 3\frac{\partial S_{ent}(x)}{\partial x}, \tag{4.112}$$

と定義すれば，紫外・赤外極限でそれぞれの共形場理論の中心電荷と一致する．このように定義した $c(x)$ をエントロピー的な c 関数と呼ぶ [39]．実際に (4.111) から

$$\frac{\partial}{\partial x} c(x) \leq 0, \tag{4.113}$$

という長さスケールに対する単調減少の性質が導かれる．これがエントロピー的な c 定理の証明である [39]．

4.7 高次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー

さてそれでは高次元 $(d > 1)$ の共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーに目を向けたい．レプリカ法の計算 (3.3) 自体は高次元でも適用できるが，2 次元共形場理論の時と比べて共形変換の自由度が小さいので解析的に計算ができる例は非常に限られている．現在のところ，場の理論の計算で導出できる普遍的な性質は面積則 (3.21) を除くと，以下の 4.8 節で説明する log 項の係数などに限られる．しかし第 7 章で説明するようにホログラフィー原理に基づく計算を利用すると一般的な振る舞いを導出することができる．ここではそのような知識を総合して得られる高次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーの一般的な振る舞いをまず説明したい．

まず部分系 A の選び方であるが，解析的な結果を得るためには図 4.4 のようにとる場合が多いが，ここでは図 2.1 のように一般にとっておく．l は A の長さの目安とし，A の境界 ∂A は滑らかな曲面とする．このときに S_A は一般に以下のように振る舞う：

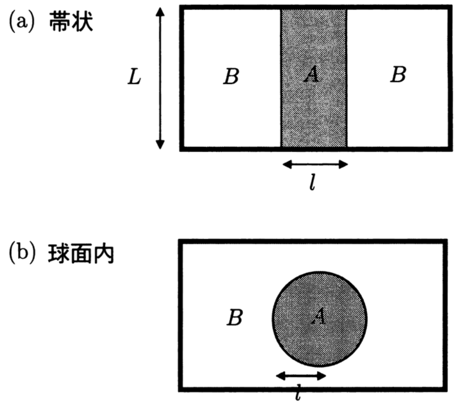


図 4.4 典型的な部分系 A の選び方．(a) 帯状領域と (b) 球面領域.

$$
\begin{aligned}
S_A = \quad & s_1 (l/\epsilon)^{d-1} + s_3 (l/\epsilon)^{d-3} + \cdots \\
& \cdots + \begin{cases} s_{d-1} (l/\epsilon) + F, & d\text{: 偶数}, \\ s_{d-2} (l/\epsilon)^2 + C \log (l/\epsilon) + s_d, & d\text{: 奇数}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.114}
$$

式 (4.114) の最初の項は面積則 (3.21) に相当する．$s_1, \cdots$ はカットオフ ϵ の取り方に依存する定数であり，一方 F と C はカットオフに依存しない定数である．従って後者は共形場理論を特徴づける重要なパラメーターとなる．実際，4.8 節で説明するように C は偶数次元の共形場理論の中心電荷（高次元では複数の種類がある）の線形結合で書ける．中心電荷が存在しない奇数次元では 4.9 節で説明するように F が自由度を特徴づけるパラメーターとなる．

これらのパラメーター $s_1, \cdots, F, C$ はすべて部分系 A の形に依存する．例えば図 4.4 の (a) 幅が l で長さが L の帯状領域

$$
0 \le x_1 \le l, \ \ 0 \le x_2, x_3, \cdots, x_d \le L, \tag{4.115}
$$

にとると，面積則の s_1 と有限項 F, s_d 以外はゼロになる．これは $s_3, \cdots$ が ∂A の曲率の多項式で表されるからである．結果として以下の形にまとまる：

$$
S_A^{\text{帯}} = (\text{定数}) \cdot \frac{L^{d-1}}{\epsilon^{d-1}} + (\text{定数}) \cdot \frac{L^{d-1}}{l^{d-1}}. \tag{4.116}
$$

また今までは ∂A が滑らかと仮定したが，もし図 4.5 のように ∂A がカスプ上の特異点を含む場合は (4.114) に含まれない $(l/\epsilon)^{d-2}$ などに比例した項が現れることが知られている [40], [41].

一般の部分系 A に対して場の理論の計算を行うのは難しいが，特に帯状領域にとった場合の結果 (4.116) を説明しよう．$d+1$ 次元の無質量自由場理論を考え，x_i $(i = 2, \cdots, d)$ の座標を長さ L にコンパクト化する，つまり $x_i \sim x_i + L$ と同一視し周期的境界条件を課す．このようにすると $d+1$ 次元の場の理論は 2 次元の場の理論の無限個集めたものと解釈できる．その無限個の 2 次元理論

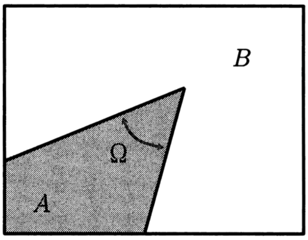


図 4.5　部分系 A がカスプ上の特異点を含む場合.

は $d-1$ 次元方向の運動量 k_i でラベルされ，$k_i \in \frac{2\pi}{L}\mathbf{Z}$ と量子化される．今考えたいのは $L \to \infty$ の極限であり，この時 k_i は連続的な値をとる．自由場理論では違う運動量を持つセクターは独立で，質量 $m = |k|(\equiv \sqrt{\sum_i k_i^2})$ を持つ 2 次元自由場理論となる．従って有質量な 2 次元場の理論のエンタングルメント・エントロピーの性質を知る必要がある．

そこで (4.112) を以下のように書き換える．

$$
l\frac{dS_A^{2d}(l)}{dl} = C(lm). \tag{4.117}
$$

ここで l は部分系 A の長さ，m は 2 次元自由場理論の質量である．今考えている系には次元を持つ量は l と m のみであるので，エントロピー的 c 関数は $c(lm)$ の形で与えられる．カットオフ ϵ 依存性は S_A の l の微分で落ちることに注意されたい．

$d+1$ 次元の自由場の理論のエンタングルメント・エントロピーは各運動量セクターを足しあげれば求められるので，

$$
\begin{aligned}
l\frac{dS_A(l)}{dl} &= \frac{L^{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\int dk_2\cdots dk_d C(l|k|) \\
&= \frac{L^{d-1}}{2^{d-2}\pi^{(d-1)/2}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\int_0^\infty dk k^{d-2}C(lk),
\end{aligned} \tag{4.118}
$$

と計算できる．最後に l に関して積分すれば

$$
\begin{aligned}
S_A(l) &= \left[\frac{L^{d-1}}{2^{d-2}\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\right]\int_0^\infty dk k^{d-2}\int_\epsilon^l \frac{d\tilde{l}}{\tilde{l}}C(\tilde{l}k), \\
&= \left(2^{d-1}\pi^{\frac{d-1}{2}}\ \Gamma((d+1)/2)\right)^{-1}\cdot\left[\int_0^\infty dx x^{d-2}C(x)\right]\cdot\left[\frac{L^{d-1}}{\epsilon^{d-1}} - \frac{L^{d-1}}{l^{d-1}}\right],
\end{aligned}
$$

となり (4.116) の振る舞いを得る [16], [42]．

4.8　偶数次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー

偶数次元（$d+1$ が偶数）の共形場理論では，(4.114) にあるように $\log(l/\epsilon)$

に比例する項が存在する．この項の係数 C はカットオフの選び方に依存しないという顕著な性質を持っている．本節の目的はこの項に関して詳しく調べ，中心電荷との関係を明らかにすることである．

簡単のためまず 2 次元共形場理論から考えてみる．エネルギー運動量テンソルの変換則 (4.53) とその保存則 (4.20) などより，次の公式

$$\langle T^{\mu}_{\mu}(x)\rangle = \frac{c}{24\pi}R, \tag{4.119}$$

を証明できる．今は曲がった空間におけるエネルギー運動量テンソルのトレースを考えており，ここで R はスカラー曲率を意味する．共形場理論を古典論で扱う限りは，エネルギー運動量テンソルはプライマリー場のように変換するので，平坦な時空から共形変換して曲がった時空に移っても，トレースがゼロになる性質 (4.18) はそのまま成り立つ．しかし量子論では，エネルギー運動量テンソルの変換性に (4.53) のように中心電荷に比例する補正項が生じる．そのおかげで，平坦な時空では当然 $T^{\mu}_{\mu}=0$ が成り立っていても，それを共形変換して得られる曲がった時空では (4.119) のようにトレースが期待値を持つ現象が起こるのである．このスケール変換の量子論的な破れから生じる現象は，**トレース・アノマリー** (trace anomaly) や**ワイル・アノマリー** (Weyl anomaly) などと呼ばれ，偶数次元の共形場理論で一般に起こる．

さて，$d+1$ 次元のエンタングルメント・エントロピーをレプリカ法で計算し，部分系 A の長さスケール l での微分を考えると，スケール変換の生成子は T^{μ}_{μ} なので，

$$\begin{aligned} l\frac{d}{dl}\log \mathrm{Tr}\rho_A^n &= 2\int d^{d+1}x g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\left[\log Z_{\Sigma_n} - n\log Z_{\Sigma_1}\right] \\ &= \left\langle \int d^{d+1}x\sqrt{g}T^{\mu}_{\mu}\right\rangle_{\Sigma_n} - n\left\langle \int d^{d+1}x\sqrt{g}T^{\mu}_{\mu}\right\rangle_{\Sigma_1}, \end{aligned} \tag{4.120}$$

がまず得られる．ここで Σ_n は (3.10) のように n 枚のシートを部分系 A で順番につなげた空間である．Σ_1 は平坦な空間を意味するので (4.120) の第 2 項は消える．従って，エンタングルメント・エントロピーは

$$\begin{aligned} l\frac{dS_A}{dl} &= -\lim_{n\to 1} l\frac{d}{dl}\left(\frac{\partial}{\partial n}\log \mathrm{Tr}\rho_A^n\right) \\ &= -\lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial n}\left\langle \int d^{d+1}x\sqrt{g}T^{\mu}_{\mu}\right\rangle_{\Sigma_n}, \end{aligned} \tag{4.121}$$

と表すことができる．

そこで 2 次元共形場理論に戻り，(4.119) を代入すると

$$l\frac{dS_A}{dl} = -\lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{c}{24\pi}\int_{\Sigma_n} d^2x\sqrt{g}R\right) = \frac{c}{3}, \tag{4.122}$$

と計算でき，既に導出した結果 (4.66) を再現する．このようにトレース・アノマリーが，log 項が生じる原因なのである．ここで，Σ_n のオイラー数 $\chi(\Sigma_n)$

が，後で説明するように*6)

$$\chi(\Sigma_n) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_n}\sqrt{g}R = 2(1-n), \tag{4.123}$$

であることを用いた．

通常の平坦な空間では，任意の点の周りで 2π の角度に広がっている．しかし，Σ_n の部分系 A の両端点においては n 周するので $2\pi n$ の角度に広がる．式で書くと極座標での計量

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{4.124}$$

において，θ の周期が 2π ではなく，$2n\pi$ であると表現できる．損失角の言葉を用いると，$2\pi(1-n) < 0$ の **（負の）損失角が存在する**ことになる．この損失角が存在するとその点 $r = 0$ は特異点となり，曲率が

$$R = 4\pi(1-n)\cdot\delta^2(x), \tag{4.125}$$

のように **δ 関数的に発散する**ことが良く知られている [43]．従って今の場合には，曲率が $R = 4\pi(1-n)(\delta^2(x-u) + \delta^2(x-v))$ のように振る舞う．これから (4.123) が導かれる．

先に進む前に，(4.125) は本書の中でもとても重要な公式であるのでその導出を説明しておく．計算をしやすくするために，$r = 0$ で特異的な空間 (4.124) を滑らかな計量の極限とみなす．すなわち，

$$ds^2 = \frac{r^2 + n^2\xi^2}{r^2 + \xi^2}dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (\theta \sim \theta + 2\pi n), \tag{4.126}$$

とすると，$r \ll \xi$ では通常の 2 次元面 $\mathbf{R}^2$ に近づき，$r = 0$ は特異点ではなくなり，一方 $r \gg \xi$ では Σ_n に近づく．従って $\xi \to 0$ の極限で (4.124) に近づくと期待される．そこで，(4.126) のスカラー曲率を計算し，その積分を実行すると ξ によらず

$$\int \sqrt{g}R = 4\pi(1-n), \tag{4.127}$$

が得られ，$\xi \to 0$ の極限を取ると確かに (4.125) が導かれる．

さてそれでは高次元の場合に移り，特に重要な例として 4 次元共形場理論を考える．この場合のトレース・アノマリーは

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = -\frac{a}{4}\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{c}{4}W_{\mu\nu\rho\sigma}W^{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{4.128}$$

---

*6) 次のように幾何学的な考察をすることでも (4.123) を導出することができる．1 枚の 2 次元平面 $\mathbf{R}^2$ に無限遠を足してコンパクト化すると球面 $\mathbf{S}^2$ が得られる．この時，前者と後者のオイラー数は $\chi = 0$ と $\chi = 2$ である．従ってこのコンパクト化の操作で χ は 2 だけ増える．さて同様の操作を Σ_n の n 枚のシートそれぞれに行うと，球面が n 個くっついた空間になり，少し考えると，位相的には球面のままであることが分かる．従って，$\chi(\Sigma_n) + 2n = 2$ を得るので，(4.123) が示された．

で与えられる．ここで，$W_{\mu\nu\rho\sigma}$ はワイル曲率テンソルであり，$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ は，リーマン曲率テンソル，$\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ はそのホッジ双対である．(4.128) の右辺第 1 項は，オイラー数密度に比例するので，積分すると位相不変量となる．第 2 項は，ワイル曲率で書けるので共形不変な量である．それぞれの項の比例係数 a と c は，ともに中心電荷と呼ばれる．繰りこみ群で単調に減少する性質を満たすのは a の方であり [44], [45]，c は満たさないことが知られており，a 定理と呼ばれる．

2 次元の場合と同様に (4.121) を用いると

$$l\frac{dS_A}{dl} = \lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial n}\int_{\Sigma_n} d^4x\sqrt{g}\left(-\frac{a}{8\pi}\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{c}{8\pi}W_{\mu\nu\rho\sigma}W^{\mu\nu\rho\sigma}\right), \tag{4.129}$$

となり，式 (4.114) における log 項の係数 C は，a と c のある線形結合で書けることは明らかである．ここで Σ_n は，レプリカ法で現れる n 枚のコピーを貼り合わせて作られる 4 次元空間である．

まず (4.129) において中心電荷 a の寄与を考える．この項は Σ_n のオイラー数 $\chi(\Sigma_n)$ に比例する．Σ_n は部分系 A の境界 ∂A の周りに損失角 $\delta\theta = 2\pi(1-n)$ を導入した空間なので，$\Sigma_n \simeq \partial A \times \Sigma_{\delta\theta}$ とみなせる．ここで $\Sigma_{\delta\theta}$ は，損失角 $\delta\theta$ が原点に入っている 2 次元面を意味する．従って，そのオイラー数は，

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma_n) &= \frac{1}{32\pi^2}\int_{\Sigma_n} d^4x\sqrt{g}R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \chi(\partial A)\cdot\chi(\delta\theta) + \chi_0 \\ &= (1-n)\cdot\chi(\partial A) + \chi_0,\end{aligned} \tag{4.130}$$

と求められる．χ_0 は Σ_n から ∂A を取り除いた特異点のない多様体のオイラー数であり，最後に $n=1$ と置く段階で消えてしまうので S_A には寄与せず無視できる．さて，このように (4.129) の a に比例する項を見積もることができ，log 項の係数 C は，

$$C = -2a\cdot\chi(\partial A) + (c \text{ の寄与}), \tag{4.131}$$

となる．特に ∂A を半径 l の 2 次元球 $\mathbf{S}^2$ とすると，c の寄与が消えることを示すことができ，

$$C_{\partial A=\mathbf{S}^2} = -4a, \tag{4.132}$$

を得る [16]．

一方，もうひとつの中心電荷である c に比例する寄与は計算が大変複雑である．係数 C の完全な表式は，ホログラフィー原理の結果も援用することで得られており，以下のとおりである [46], [47]：

$$\begin{aligned}C &= -2a\cdot\chi(\partial A) \\ &\quad + \frac{c}{2\pi}\int_{\partial A} d^2x\left(W^{\mu\nu\rho\sigma}g^{\perp}_{\mu\rho}g^{\perp}_{\nu\sigma} - K^{(i)\mu}_{\nu}K^{(i)\nu}_{\mu} + \frac{1}{2}(K^{(i)\mu}_{\mu})^2\right).\end{aligned} \tag{4.133}$$

ここで，$g^{\perp}_{\mu\nu}$ は ∂A に垂直な 2 次元方向に制限した計量とし，$K^{(i)}$ $(i=1,2)$ はその 2 方向のそれぞれに対する外曲率であり i について和をとっている（外曲率の定義に関しては第 6 章の (6.16) を参照）.

4.9 奇数次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー

次に奇数次元の共形場理論のエンタングルメント・エントロピーの性質について掘り下げる．奇数次元における特徴は，(4.114) にあるように紫外カットオフ ϵ に依存しない有限の項 F が存在することであり，以下ではこの項を詳しく調べる.

まず，$d+1$ 次元ミンコフスキー時空を極座標を用いて，

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\Omega_{d-1})^2, \tag{4.134}$$

と表す．さらに次のような座標変換を行う [48]：

$$\begin{aligned} t &= \frac{R\cos\theta\sinh(\tau/R)}{1+\cos\theta\cosh(\tau/R)}, \\ r &= \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta\cosh(\tau/R)}. \end{aligned} \tag{4.135}$$

すると，計量はスケール因子 $A(\theta)^2$ を除いて半径 R の**ドジッター時空** (de Sitter space) に一致することが分かる：

$$ds^2 = A(\theta)^2\left(-\cos^2\theta d\tau^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega^2_{d-1})\right), \tag{4.136}$$
$$A(\theta) = (1+\cos\theta\cosh(\tau/R))^{-1}.$$

ドジッター時空は $(\tau, \theta, \Omega_{d-1})$ の座標（静的座標と呼ぶ）で張られ，$-\infty \le \tau \le \infty$，$0 \le \theta \le \pi/2$ の値をとる．$\theta = \pi/2$ の時，$g_{\tau\tau} = 0$ となるので，ドジッター時空の地平線に相当する．ブラックホールの地平線のように，地平線の内側を観測者は知ることができない．このドジッター時空において $\tau_E = i\tau$ とおいてユークリッド化すると

$$ds^2 = \cos^2\theta d\tau_E^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega^2_{d-1}), \tag{4.137}$$

という計量になるが，まさにこれは $d+1$ 次元球面 $\mathbf{S}^{d+1}$ の計量と一致する．この時，τ_E の周期は $2\pi R$ であることが分かる．次章で詳しく説明するブラックホールと同様の考え方で，この周期からドジッター時空が温度 $T_{dS} = \frac{1}{2\pi R}$ を持つという有名な事実が導かれる.

さて，(4.134) において部分系 A として $t=0$ において半径 R の球 $r \le R$ をとる．(4.136) のドジッター時空の座標に直すと A は，$\tau = 0$，$0 \le \theta \le \pi/2$ と表される．従って，A は丁度ドジッター時空の地平線の外側の領域に相当す

る．また今は共形場理論を考えているので，ワイル変換による不変性 (4.18) があり，スケール因子 $A(\theta)$ の存在は無視できる．従って，**ミンコフスキー時空におけるエンタングルメント・エントロピー S_A は，ドジッター時空上で定義された共形場理論の熱力学的エントロピー S_{dS} と等しい**[48]．奇数次元の共形場理論を考えているのでトレースアノマリーは存在せず，ドジッター時空におけるエネルギー E_{dS} は対称性からゼロであることがわかる．従って，自由エネルギーを F_{dS} とすると熱力学の関係式より

$$T_{dS}\cdot S_{dS}=E_{dS}-F_{dS}=-F_{dS}. \tag{4.138}$$

を得る．従って，

$$S_A=S_{dS}=-\frac{F_{dS}}{T_{dS}}=\log Z(\mathbf{S}^{d+1}). \tag{4.139}$$

ここで $Z(\mathbf{S}^{d+1})$ は球面上の共形場理論の分配関数である．実際に分配関数を計算すると紫外発散があるが，それを正則化して有限にしたとすると S_A の有限部分つまり F が，$\log Z(\mathbf{S}^{d+1})$ に一致することが分かる[48]．つまり奇数次元では，**半径 R の部分系 A に対するエンタングルメント・エントロピーの有限部分は，半径 R の球面上の分配関数の対数と等しい．**

さて，より一般に共形不変性を持たない $d+1$ 次元の場の理論を考えたときにも $F=\log Z(\mathbf{S}^{d+1})$ を考えることが出来るが，クレバノフらは $\mathcal{F}=(-1)^{d/2}F$ という量が繰りこみ群で単調減少することを提案し，様々な例で確かめた[49]．偶数次元の共形場理論では既に説明したように中心電荷 c が存在し，それを一般化した c 関数が繰りこみ群で単調減少するという c 定理を考えることができた．奇数次元では，中心電荷を定義できないが，代わりに $\mathcal{F}$（F 関数と呼ばれる）を用いることができるというわけである．

ではエンタングルメント・エントロピーを用いて F 関数を定義できるであろうか？　偶数次元のときは実際にエントロピー的 c 関数 (4.112) を定義することができた．簡単のため 3 次元の場の理論を考える．この時，エントロピー的な F 関数を以下のように定義できる[50],[51]：

$$\mathcal{F}(R)=R\frac{\partial S_A(R)}{\partial R}-S_A(R). \tag{4.140}$$

ここで $S_A(R)$ は半径 R の円板で与えられる部分系 A に対するエンタングルメント・エントロピーである．$S_A(R)$ は紫外発散を含んでいるが，それは $\frac{R}{\epsilon}$ に比例しているため (4.140) において完全に相殺され，$\mathcal{F}(R)$ は有限な量となっている．特に $R\to 0$（紫外極限）と $R\to\infty$（赤外極限）で実現される共形場理論においてはそれぞれの $F=\log Z(\mathbf{S}^3)$ に一致する．

2 次元のエントロピー的 c 定理は，4.6 節で説明したように強劣加法性 (2.27) を用いて証明することができた．同様に，3 次元の場合も強劣加法性を用いて

$$\frac{d\mathcal{F}(R)}{dR} \leq 0, \tag{4.141}$$

というエントロピー的な F 定理が証明されている[51]．しかしこの場合は，議論が 2 次元の場合よりもずっと複雑で，強劣加法性を無限回利用する必要がある．詳細を知りたい読者は原論文[51] を参照されたい．またエントロピー的 F 関数の性質については文献 [52] を参照.

4.10 トポロジカルな量子系のエッジ・バルク対応

前節では，正の曲率を持つドジッター時空が現れる座標変換を考えたが，負の曲率を持つ空間が現れる変換を考えるとどのような物理現象が理解できるだろうか．座標変換

$$t = \frac{R\sinh(\tau/R)}{\cosh u + \cosh(\tau/R)}, \quad r = \frac{R\sinh u}{\cosh u + \cosh(\tau/R)} \tag{4.142}$$

をミンコフスキー時空 (4.134) に対して行うと

$$ds^2 = B(\theta)^2(-d\tau^2 + R^2(du^2 + \sinh^2 u d\Omega_{d-1}^2)), \tag{4.143}$$
$$B(\theta) = (\cosh u + \cosh(\tau/R))^{-1}, \quad (0 \leq u < \infty)$$

のようにスケール因子 $B(\theta)^2$ を除いて $\mathbf{R}\times\mathbf{H}_d$ の計量に一致する．ここで，$\mathbf{H}_d$ は d 次元の負の定曲率空間（双曲空間，hyperbolic space）であり*7)，(u, Ω_{d-1}) の座標で記述される．ここで Ω_{d-1} は $\mathbf{S}^{d-1}$ の座標．τ は時間方向 $\mathbf{R}$ の座標である．$\tau_E = i\tau$ としてユークリッド化すると，(4.142) から分かるように τ_E の周期性は $2\pi R$ となる．従って，この座標変換で $\mathbf{S}^1\times\mathbf{H}_d$ を得る．また，$\mathbf{H}_d$ の境界 $u=\infty$ は，$\mathbf{S}^{d-1}$ で与えられることに注意.

さて，ミンコフスキー時空 (4.134) の部分系 A を $t=0$ の半径 R の球 $r\leq R$ と定義しよう．A を (4.142) の座標変換で $\mathbf{R}\times\mathbf{H}_d$ へ移すと，$\tau=0$ のスライス全体，つまり $\mathbf{H}_d$ そのものになる．このようにして，**共形場理論のエンタングルメント・エントロピー S_A は，温度 $T=\frac{1}{2\pi R}$ の $\mathbf{H}_d$ 上の共形場理論の熱力学的エントロピーと等しいことが分かる**[48]．この関係を用いると，S_A の面積則による発散は，熱力学的エントロピーにおいて，$\mathbf{H}_d$ の体積の因子が発散することに対応する．密度行列の言葉で言うと，領域 A に制限された密度行列 ρ_A を考えることは，$\mathbf{S}^1\times\mathbf{H}_d$ の有限温度密度行列 $\rho_{hyp} = e^{-\beta H_{hyp}}$ に等しい．ここで $\beta = 2\pi R$ とし，H_{hyp} は $\mathbf{H}_d$ 上のハミルトニアンである.

共形場理論は，計量のスケール倍で不変な場の理論であるが，さらに特殊な場

*7) $\mathbf{H}_d$ は，d 次元反ドジッター時空 (AdS_d) のユークリッド化と思うこともできる．詳細は第 6 章を参照されたい.

の理論として**計量自体に依存しない理論**（**トポロジカルな場の理論**，topological field theory）を考えることができる．このような理論には伝播する自由度が全くなく，ダイナミクスが存在しない．従って相関関数は自明となる．しかし，量子エンタングルメントのように非局所的な相関は非自明である．さてそこで，A に制限された密度行列 ρ_A を考えると前述のように ρ_{hyp} と等価であるが，今はトポロジカルな理論を考えているため $\mathbf{H}_d$ 内部（バルク）の自由度は存在せずハミルトニアンも自明である．しかし，$\mathbf{H}_d$ には境界（エッジ）$\mathbf{S}^{d-1}$ があるため，ダイナミカルな自由度がこの境界上でのみ存在できる．実際，量子ホール効果やトポロジカル絶縁体などのようにトポロジカルな秩序を持つ量子系（**トポロジカル相**）では，バルクのスペクトラムにギャップがある（低エネルギーで自由度が存在しない）が，エッジではギャップレスな自由度（エッジ状態）が存在することが多々ある．そのような系では，H_{hyp} を 1 次元低い境界部分に局在した自由度のハミルトニアン H_{edge} と同一視できる．このようにして

$$\rho_A = e^{-H_{ES}} \simeq e^{-\beta H_{edge}}, \tag{4.144}$$

という関係式が得られる．上で，H_{ES} は，ρ_A の log として直接定義され，**エンタングルメント・ハミルトニアン**と呼ばれる．H_{ES} の固有値がエンタングルメント・スペクトラムである [29]．つまり，関係式 (4.144) は，エンタングルメント・スペクトラムとエッジのハミルトニアンは等価であることを意味している [53]．この等価性は，主に物性理論の分野では**バルク・エッジ対応**と呼ばれる [29], [54]．このバルク・エッジ対応は，次章以降の主要テーマであるホログラフィー原理（AdS/CFT 対応）と大変類似しており，ある意味，ホログラフィー原理のトイ模型とみなすこともできる．しかしながら，ホログラフィー原理で最も本質的なことは重力理論が重力を含まない理論と等価になるという驚くべき事実であり，以上で説明したバルク・エッジ対応よりもはるかに複雑で非自明な現象であることに注意されたい．

第 5 章
ブラックホールとホログラフィー原理

本章では，ブラックホールの熱力学からはじめて，ホログラフィー原理の発見に至った経緯を概説したい．ホログラフィー原理は，次の章からのメインテーマである AdS/CFT 対応をその特別な場合として含む，大変幅広い考え方である．

5.1　ブラックホールと熱力学

一般相対性理論が記述する 4 次元（=3+1 次元）時空の重力理論を考えよう．ある領域内に物質をどんどん球対称に詰めてゆくと（全質量を M とする），その半径がシュワルツシルド半径

$$r_H = 2G_N M, \qquad (G_N\text{は重力定数}) \tag{5.1}$$

より小さくなると（$r = r_H$ を事象の地平線という），**重力崩壊**と呼ばれる現象を起こし，

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_H}{r}} + r^2 d\Omega^2, \tag{5.2}$$

の計量で与えられる**シュワルツシルド・ブラックホール**になる（$d\Omega^2$ は 2 次元球面の極座標）．さらに物質を放り込んでもブラックホールの半径が増えるだけなので，半径 r 内に許される物体の最大質量は $\frac{r}{2G_N}$ であることが分かる．

重い物体がいったんブラックホールに崩壊してしまうと，とても強い重力場を作るため，物質や光はその内部から外に出てくることは不可能になることが一般相対論からすぐに分かる．しかしながらホーキングは，量子効果をとり入れるとブラックホールはある温度 T_H の黒体とみなせ，実際には輻射光が外に出てくることを示した（**ホーキング輻射**と呼ばれる）[2]．

この温度 T_H を計算するには，まず地平線近傍で計量が

$$ds^2 = -\left(\frac{r - r_H}{r_H}\right) dt^2 + \left(\frac{r_H}{r - r_H}\right) dr^2 + r_H^2 d\Omega^2, \tag{5.3}$$

と近似できることに着目する．半径方向の座標を以下のように再定義すると

$$\xi = 2\sqrt{r_H(r - r_H)}, \tag{5.4}$$

計量は

$$ds^2 = -\frac{\xi^2}{4r_H^2} dt^2 + d\xi^2 + r_H^2 d\Omega^2, \tag{5.5}$$

と書ける．有限温度理論を考えるときにするように，時間をユークリッド化 $t_E = it$ すると，(t_E, ξ) で張られるユークリッド空間が極座標で表された $\mathbf{R}^2$（平坦な 2 次元平面）で与えられることが分かる．このとき（円錐型）特異点を持たないという要請から，t_E は $4\pi r_H$ の周期を持たないといけないことがすぐに分かる．ユークリッド時間の周期は温度の逆数に比例するので，結果としてブラックホールの温度は

$$T_H = \frac{1}{8\pi G_N M}, \tag{5.6}$$

と求まるのである．

このようにブラックホールは温度を持つが，さらに興味深いことにブラックホールは熱力学に従うことが分かる [3]．ブラックホールの熱力学第一法則は，通常の熱力学のように，エネルギーの変化はエントロピーの変化に温度を掛けたものに等しいという関係である．ブラックホールのエネルギーはその質量と同じなので，ブラックホールの第一法則は，

$$T_H dS = dM, \tag{5.7}$$

と表される．従って，エントロピーは，

$$S = 4\pi G_N M^2, \tag{5.8}$$

と計算される．ブラックホールの地平線の面積 $A_H = 4\pi r_H^2$ を用いて書き直すと，

$$S = \frac{A_H}{4G_N}, \tag{5.9}$$

の関係を得る．これは，**ベッケンシュタイン・ホーキング公式**としてよく知られ [1], [2]，**面積則**とも呼ばれる．この公式 (5.9) は，時空の次元や地平線の形などによらず普遍的に成立することが知られている．

また，熱力学の第二法則に相当する性質として，地平線の面積は物理過程（例えば 2 つのブラックホールの合体など）で必ず増えるということも証明できる．ただし，ブラックホールの外側に熱力学にしたがう物質が存在する場合は，その物質の熱力学的量とブラックホールの熱力学的量を足し合わせたものが，熱力学の法則に従う（一般化されたブラックホールの熱力学と呼ばれる）．

5.2 ブラックホールからホログラフィー原理へ

さて,「ブラックホールが有限のエントロピーを持ち，熱力学の法則に従う」という事実を物理的にどう解釈したらよいのだろうか．そこで重い星が重力崩壊してブラックホールを生み出す過程を考えよう．一旦ブラックホールができると外部の観測者はその中身を観測することができない．この場合に，外部の観測者からすると，もともとの星の内部の情報（例えば，電荷や粒子数）に，途中からアクセスできなくなることを意味する．従って，このブラックホール内部に隠された情報の量がブラックホールのエントロピーと解釈するのが自然であろう．つまり外部の観測者からすると，内部の状態に関して推測するといろいろな可能性（不確定性）が生じ，純粋状態ではなく，密度行列 ρ_H で記述される混合状態として観測されることになる．従って，フォンノイマン・エントロピー $S=-\mathrm{Tr}\rho_H\log\rho_H$ が生じることになり，それが面積則 (5.9) で与えられるというわけである．

しかしながら，ブラックホールが熱力学に従うとすると不思議なことがある．我々が教科書で学ぶように熱力学ではエントロピーやエネルギーと言った示量的な物理量は系の体積に比例する．一方，ブラックホールでは面積則 (5.9) が示すようにエントロピーは面積に比例する．これは一見，ブラックホールの熱力学が何か例外的なものであるかのように思えるかもしれない．しかし実は，以下で説明するように決してそうではなく，重力の理論とは一体何なのか？　という根源的な問いに対する重大なヒントを与えてくれるのである．

そこで，重力理論における自由度の振る舞いについて理解するためにある空間領域にどれだけの物質を詰め込めるのか考えて見る．ブラックホールが物質を詰め込む際の限界に相当するという事実と面積則 (5.9) から,「**一般相対論においては，ある領域内に含まれるエントロピーの最大値はその領域の表面積に比例する**」という性質

$$S_{Max}\leq\frac{\text{領域の表面積}}{4G_N},\tag{5.10}$$

が導かれることは直感的に明らかである．これを**エントロピーバウンド**と呼ぶ．より一般に共変的に定式化したものはブッソ・バウンド[55] と呼ばれる．すなわち，$d+2$ 次元時空の重力理論で許される自由度は，あたかも $d+1$ 次元の重力を含まない理論の自由度のように振る舞うのである．ここで $d+1$ 次元は，空間が d 次元，時間が 1 次元という意味である．つまり重力理論における自由度が重力を含まない理論の場合と本質的に異なることを意味し，極めて重要な性質と言える．例えば，イジング模型のようなスピン系に例えると，空間 3 次元を記述する重力理論は，それを取り囲むプランク長程度の格子間隔を持った 2 次元格子のスピン系程度の自由度しか持たないわけである．

このように $d+2$ 次元のブラックホールの熱力学を $d+1$ 次元の量子系の熱力

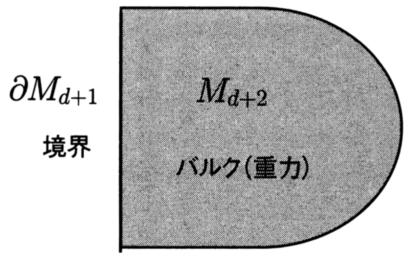


図 5.1　ホログラフィー原理の概念図.

学と解釈すれば，エントロピーの振る舞いは上手く一致する．ブラックホールは，重力理論の基底状態を有限温度に加熱して得られる物体と自然に考えられるので，これらのことから「**$d+2$ 次元の重力理論は，重力を含まない $d+1$ 次元の量子系と物理的に等価であろう**」という少々大胆な推測が生まれる．このように予想される等価性は**ホログラフィー原理** (Holographic Principle)，もしくは**ホログラフィック双対** (Holographic Dual) とよばれ，トフーフトやサスキンドによって初めて提唱された[12]．図 5.1 にあるように，典型的には，境界のある $d+2$ 次元時空 M における重力理論を念頭に置いており，それと等価な $d+1$ 次元の量子系は，その境界 ∂M 上にあると考える．

このホログラフィー原理が,「どの程度の幅広いクラスの重力理論に適用できるのか？」や「どうしてホログラフィー原理が成り立つのか，またホログラフィー原理の証明はできるのか？」という根本的な疑問は未だに明確には解明されていない．現時点で確実に分かっていることは次章で説明する AdS/CFT 対応と呼ばれる等価性やそのいくつかの拡張が，ホログラフィー原理の具体例として正しく機能しているという事実だけと言ってよい．しかしながら，ホログラフィー原理の主張する等価性は大変画期的なもので，素粒子論から一般相対論そして量子多体系の物理まで広範囲の物理を新しい観点で統一できることを示唆している．例えば，量子重力理論は一般の時空においては大変難解な理論であり，その最も有力な候補である超弦理論を用いても量子補正をとり入れた非摂動論的な計算が具体的に実行できる例はほとんどない．しかし，ホログラフィー原理を用いると難解な量子重力の計算を既知の量子多体系の計算に結び付けることが可能となり，新しい量子重力理論の定式化が可能になると期待されるのである．

5.3　リンドラー時空と量子エンタングルメント

さて，ブラックホール時空が出てきたのでこの機会を利用して，最後に場の理論におけるエンタングルメント・エントロピーとブラックホールのエントロピーの関わり合いに関して簡単に説明しておきたいと思う．ここでの議論は，

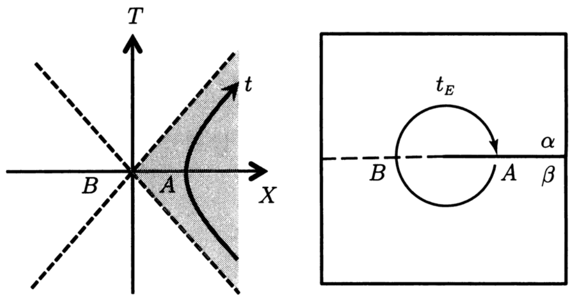


図 5.2 ブラックホールの地平線近傍に現れるリンドラー時空（左図）とユークリッド空間におけるエンタングルメント・エントロピーの計算（右図）．

純粋に場の理論の計算に基づき，前述のホログラフィー原理を全く利用しないことに注意されたい．

ブラックホールの地平線近傍の計量は，既に見たように (5.5) で与えられる．この (t, ξ) で張られるローレンツ計量の 2 次元時空は，ミンコフスキー時空 $\mathbf{R}^{1,1}$ の一部であることが分かり，**リンドラー時空**と呼ばれる．実際に，

$$T = \xi \cdot \sinh\left(\frac{t}{2r_H}\right), \quad X = \xi \cdot \cosh\left(\frac{t}{2r_H}\right), \tag{5.11}$$

を定義すれば，2 次元部分の計量が $ds^2 = -dT^2 + dX^2$ となることが分かる．また，$X + T > 0, X - T > 0$ なので，$\mathbf{R}^{1,1}$ の 4 分の 1 しか覆わないことが分かる．言い換えると，座標 (t, ξ) は，ブラックホールの地平線の外側のみを覆うが，(T, X) は全ての実数値をとり得ると仮定すると地平線の内部も記述することができるのである．図 5.2 の左図を参照されたい．

この拡張された (T, X) の座標系において，ブラックホールの外側にいる観測者は，その一部しか観測することができない．時刻 $T = 0$ において $\xi > 0$ のみを観測することができ，この領域を A と書くことにする．逆に $\xi < 0, T = 0$ を B と呼ぶことにする．この事実を密度行列で表すと，外側の観測者は次の A に制限された密度行列を観測することになる：

$$[\rho_A]_{\alpha\beta} = \langle\alpha|e^{-H_t/T_H}|\beta\rangle, \tag{5.12}$$

ここで，α, β は，密度行列の足で，部分系 A における物質場の配位に対応する．物質場とは，重力理論に含まれるスカラー場，フェルミオン場，ゲージ場のような重力場（計量）以外の場のことを意味する．H_t は，時間 t に対するハミルトニアンである．この (5.12) の表式は，ユークリッド空間における経路積分を図 5.2 の右図のように表すと理解できる．この式 (5.12) から分かるように，外側の観測者から見ると物質場はホーキング温度 T_H のカノニカル分布に従っているわけである．

さてこうしてみると，リンドラー時空の ρ_A は 3.2 節で説明したエンタング

ルメント・エントロピーの計算例の場合と全く一致することが分かる．実際に，その時に部分系 A を図 3.3 のように選んだが，これは今の場合と全く同じである．従って，リンドラー時空において地平線の外側と内側の間のエンタングルメント・エントロピーは，3.2 節のエンタングルメント・エントロピーと等しくなる．

ブラックホールのエントロピーという観点から見ると，$\rho_A = e^{-H_t/T_H}$ に対するエントロピーは，物質場からのエントロピーの寄与に相当することは明らかである．これは，場の古典論では存在しない寄与なので，ベッケンシュタイン・ホーキング公式に対する量子補正とみなすことができる．このようにみると，**「地平線の外と内のエンタングルメント・エントロピー＝ブラックホールのエントロピーの量子補正」**と解釈することができるのである [10], [11]．

また，重力定数を

$$\frac{1}{G_N^{(ren)}} = \frac{1}{G_N} + \frac{\text{定数}}{\epsilon^{d-1}}, \tag{5.13}$$

のように再定義して，有効作用を有限にするという繰りこみの操作（$G_N^{(ren)}$ が繰り込まれた重力定数）を行うと，ブラックホールのエントロピーは

$$S = \frac{A_H}{4G_N^{(ren)}}, \tag{5.14}$$

とベッケンシュタイン・ホーキング公式の形で表され，この表式には，前述の量子補正は含まれている形になっている．特に，G_N がとても大きい場合，言い換えると経路積分でどんな計量も同じ確率で寄与する場合を考えると，$G_N^{(ren)}$ への寄与が，ほとんど量子補正で与えられることになる．このような理論を，**誘導された重力理論** (induced gravity) と呼ぶ．この特別な重力理論の場合は，ブラックホールのエントロピー自体をエンタングルメント・エントロピーと解釈することが可能になることが以上の議論から分かる [11], [56]．

第 6 章
AdS/CFT対応

ホログラフィー原理が成り立つ例の代表格が AdS/CFT 対応である．AdS/CFT は超弦理論における D ブレインの考察に基づいて 1997 年にマルダセナによって発見された [15]．この対応は，一言でまとめると「$d+2$ 次元の反ドジッター時空（AdS 時空）上の量子重力理論は，$d+1$ 次元の共形場理論 (CFT) と等価である」という主張になる．本章では AdS/CFT 対応の基礎について手短に説明するが，この先を読み進む上で最低限必要な知識はすべて得られるように書かれている．本書は超弦理論の予備知識がない読者を対象に書かれているが，AdS/CFT 対応をより深く学ぶには超弦理論やその低エネルギー近似である超重力理論の基礎的理解も必要であり，そのためには他の解説（例えば文献 [57], [58]）をあたられたい．

6.1 AdS 時空

$d+2$ 次元の**反ドジッター時空** (Anti de-Sitter space) は，時間が 2 つある $d+3$ 次元時空 $\mathbf{R}^{2,d+1}$

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+2}^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2, \tag{6.1}$$

内の超曲面

$$X_0^2 + X_{d+2}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{d+1}^2 + R^2, \tag{6.2}$$

として定義される．この時空を略して AdS_{d+2} と書くことにする．ここで，定数 R は，半径（時空の大きさ）を表す．時間方向をユークリッド化すると，双曲面 $\mathbf{H}_{d+2}$ になる．

式 (6.2) の拘束条件を解くために以下のように AdS_{d+2} の座標を導入する：

$$X_0 = R\cosh\rho\cos t,$$
$$X_{d+2} = R\cosh\rho\sin t, \tag{6.3}$$
$$X_k = R\sinh\rho\,\Omega_k, \quad (k=1,2,\cdots,d+1).$$

ここで $(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_{d+1})$ は，d 次元単位球面の座標を表す．このとき，AdS_{d+2} の計量は

$$ds^2 = R^2\left(-\cosh^2\rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho d\Omega_d^2\right), \tag{6.4}$$

と表される（$d\Omega_d^2$ は d 次元単位球面の計量）．もともと時間 t は 2π の周期で周期的であったが，このままでは時間的閉曲線が現れるので，$-\infty < t < \infty$ の全ての値の t が独立であると考える（幾何学で普遍被覆をとる操作）ことにする．このように定義された時空を**大域的な AdS 時空** (global AdS) と呼ぶ．

さて，**ポワンカレ座標**と呼ばれる次のような座標を定義することもできる（ただし $\vec{x} = (x_i)$ は d 次元ベクトル）：

$$X_0 = \frac{z}{2}\left(1 + \frac{R^2 + \vec{x}^2 - x_0^2}{z^2}\right),$$
$$X_i = \frac{Rx_i}{z}, \quad (i=1,2,\cdots,d),$$
$$X_{d+1} = \frac{z}{2}\left(1 - \frac{R^2 - \vec{x}^2 + x_0^2}{z^2}\right), \tag{6.5}$$
$$X_{d+2} = \frac{Rx_0}{z}.$$

このとき計量は次のように簡単な形になる：

$$ds^2 = R^2\left(\frac{dz^2 - dx_0^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2}{z^2}\right). \tag{6.6}$$

このポワンカレ座標の AdS と大域的な AdS を比べると，前者は後者の一部分の空間を覆っているに過ぎないことが分かる．

AdS_{d+2} の座標と計量をそれぞれ x^a と $g_{ab}(a,b=0,1,\cdots,d+1)$ と表し，リッチ曲率テンソルを R_{ab} と書くと，

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0, \tag{6.7}$$

というアインシュタイン方程式を満たす*1)．ここで宇宙定数 Λ は，

$$\Lambda = -\frac{d(d+1)}{2R^2} < 0, \tag{6.8}$$

で与えられる負の定数である．AdS 時空の著しい性質は，負の曲率を持つ時空の中で，最大限の対称性を有する点である．式 (6.2) からすぐに分かるように，$SO(2,d+1)$ の変換で，AdS_{d+2} 時空は不変である．

*1) 本書では，スカラー曲率と AdS 時空の半径をともに R という記号で表すので混同しないようにされたい．前者は長さの -2 乗，後者は 1 乗の次元を持つので容易に区別できる．

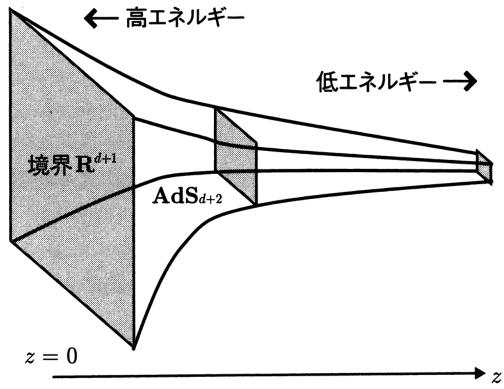


図 6.1　AdS/CFT 対応の概念図.

6.2　AdS/CFT 対応とは

ポワンカレ座標の AdS_{d+2} 計量 (6.6) を良く眺めてみよう．特に $z\to 0$ の極限を考えると時空が図 6.1 のように無限に膨らむことが分かる．この極限 $z=0$ として定義された $d+1$ 次元時空は，反ドジッター時空の無限遠すなわち境界に相当する．このポワンカレ座標では，境界は $\mathbf{R}^{1,d}$ となる．一方，大域的な AdS 時空に対しては，$\rho\to\infty$ が境界に相当し，境界は $\mathbf{R}\times\mathbf{S}^d$ で与えられる．

さて，この AdS 時空にホログラフィー原理が適用できたと仮定すると，$d+2$ 次元の AdS 時空は，$d+1$ 次元の重力を含まない理論と等価ということになる．$d+1$ 次元の場の理論が持つ対称性はローレンツ対称性 $SO(1,d)$ である．従って AdS_{d+2} の対称性 $SO(2,d+1)$ は，これよりも大きくなってしまう．しかしながら，$d+1$ 次元の理論に共形対称性があると仮定すると，すでに第 4 章でみたように対称性が $SO(2,d+1)$ に拡大される．このようにして，ホログラフィー原理に従うと，AdS 時空は 1 次元低い空間上の共形場理論と物理的に等価になると期待され，これがまさに **AdS/CFT 対応**である．一般に 2 つの見かけが異なる理論が実は等価になる現象を**双対性**と呼ぶことに従って，AdS 時空の重力理論と CFT が双対であるというような言い回しをする．

さてそれでは，AdS_{d+2} 時空とホログラフィックに等価な $d+1$ 次元の共形場理論は，AdS 時空のどこに存在するのだろうか？　この問題に答える一つの方法は，AdS 時空の初期値問題を考えることである．ある時間一定面上の状態を決めたら，それ以降のすべて時間発展を決定できるだろうか？　AdS 時空の場合は，答えは否である．なぜならば，時間を含む境界が前述のように存在するので，そこでの境界条件を指定する必要があるからである．その意味で AdS 時空は時間発展が不完全である（コーシー地平線が存在する）．しかしながら，その境界条件こそが，ホログラフィックな $d+1$ 次元の理論の状態に相当する

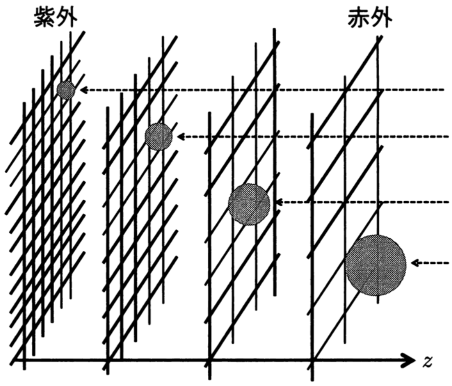


図 6.2　AdS/CFT 対応とエネルギースケール.

と考えるとつじつまがあう．つまり AdS 時空の境界にホログラフィックな理論が存在すると期待されるのである．

具体的にさきほどのポワンカレ座標を思い出すと，境界は $z=0$ で，境界の座標は $x_\mu=(x_0,x_1,\cdots,x_d)$ だが，その観点からすると時間発展ではなく，z 方向の発展を考えるのが自然である．では，z 方向の座標は一体何に相当するのだろうか？　$SO(2,d+1)$ の共形対称性のうちローレンツ対称性は，x_μ のみに働くのは明らかであるが，スケール変換は，AdS 側では x_μ のスケールのみならず，

$$x_\mu \to \lambda x_\mu, \quad z \to \lambda z, \tag{6.9}$$

のように z にも働く．従って，z 座標は，長さのスケールを表していると理解できるのである．境界 $z=0$ は，その意味で長さがゼロ，つまりエネルギーが ∞ の状態（紫外極限）に相当するわけである．z が徐々に大きくなるにつれ，エネルギーが下がり，$z=\infty$ では，ゼロ（赤外極限）になる．場の理論の言葉で言うと繰りこみ群に相当し，繰りこみ点のエネルギーが E 程度の物理の情報が，$z\sim\frac{1}{E}$ の AdS のスライスに書き込まれているわけである（図 6.2 参照）．

6.3　超弦理論からの AdS/CFT 対応の導出

AdS/CFT 対応において，ある特定の AdS 時空が具体的にどのような共形場理論と等価になるのか理解するには，超弦理論の知識が必要になる（詳細は，文献 [13] や文献 [15] などを参照されたい）．紙面の都合上詳細は省くが，代表的な $d=3$ の場合について簡単に触れておく．10 次元の時空を記述するタイプ IIB 超弦理論と呼ばれる弦理論において AdS 時空を作る最も簡単な方法は，D3 ブレインと呼ばれる $3+1$ 次元の板のような物体（ソリトン）を多数重ねて配置し，その近傍の時空に着目することである．

一般に **D*p* ブレイン**とは，$p+1$ 次元に広がった物体で，超弦理論の弦の端点が付着することができる空間として定義される．このような両端を持つ弦は**開弦**と呼ばれ，低エネルギー極限をとるとゲージ理論で記述される．N 枚 D ブレインがあると，開弦の 2 つの端点はどのブレインに付着するかで，それぞれ N 通りの可能性がある．従って，開弦の場は $N \times N$ の行列の自由度を用いて表される．そのようにして，D ブレインの低エネルギーの励起は，$U(N)$ のゲージ理論で記述されるのである．ただし，AdS/CFT 対応においては，$U(N)$ のゲージ対称性のうち，$U(1)$ 部分は抜け落ちてしまうことが知られ，ゲージ群は $SU(N)$ とみなされる．

特に，D3 ブレインが N 枚重なった状態を考えると，4 次元の $U(N)$ ゲージ理論となり，特に超対称性を最大に持つ $\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論と呼ばれる理論となる．この理論は，超対称性によってボソンとフェルミオンの量子効果が相殺し，紫外発散が生じず，共形不変性が保たれることが知られる．つまり，4 次元共形場理論の一例である．この $\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論は，6 つの実スカラー場，1 つのゲージ場，4 つのマヨラナ・フェルミオン場から構成される理論であり，すべての場はゲージ群 $U(N)$ の随伴表現に属し，その自由度は N^2 に比例する．

さて，D ブレインは大変重い物体なので，一般相対論に従って，周りの時空を大きく曲げる．結果として，$\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ の 32 個超対称性 [59] を持った時空が得られることが分かる．N 枚の D3 ブレイン上には，4 次元の $\mathcal{N}=4$ $SU(N)$ の超対称性ゲージ理論が存在するので，AdS/CFT 対応は，「**4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論と $\mathbf{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ の時空を記述するタイプ IIB 超弦理論が等価である**」という主張になる．これが AdS/CFT 対応の中で最も基本的な例である．後者のタイプ IIB 超弦理論は，端を持たず輪ゴムのように繋がった弦（**閉弦**と呼ばれる）から構成される弦理論である．この観点からみると AdS/CFT 対応は**開弦と閉弦の双対性**と見なすこともできる．

この $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ の例において，AdS 時空の半径と球面の半径 R は等しく，以下で与えられる：

$$\frac{R}{l_s} = (8\pi^2 g_{YM}^2 N)^{1/4} = (8\pi^2 \lambda)^{1/4}, \tag{6.10}$$

ここで l_s は弦の長さを表すパラメーターであり，ゲージ理論の結合定数を g_{YM} と書いた．$\lambda = N g_{YM}^2$ を**トフーフト結合定数**と呼ぶ．

超弦理論は 10 次元の時空でのみ考えることができるので，上で見たように，5 次元の AdS 時空のほかに，5 次元の球面 $\mathbf{S}^5$ も現れている．AdS/CFT 対応を考えるときには，本当は両者からの寄与を同時に考える必要があるが，本書で扱う例では，球面上の場の配位が均等であるとみなせるので，有効的に 5 次元の AdS 時空上の重力理論を考えればよい．その場合に 5 次元の重力定数 $G_N^{(5)}$ は，10 次元超弦理論の重力定数 $G_N^{(10)}$ を $\mathbf{S}^5$ の体積 $\pi^3 R^5$ で割ったもので与え

られ，

$$G_N^{(5)} = \frac{G_N^{(10)}}{\pi^3 R^5} = \frac{\pi R^3}{2N^2}, \tag{6.11}$$

と求まる．

AdS 半径 R の表式 (6.10) からわかるように，ゲージ理論が強結合 $\lambda \gg 1$ だと，AdS の半径が弦の長さ l_s よりも大きくなり，弦理論特有の補正が小さくなる．また，AdS 半径とプランク長 l_p の比をとると，$l_p^8 \propto G_N^{(10)} \propto g_{YM}^4 l_s^8$ であることから

$$\frac{R}{l_p} \propto N^{\frac{1}{4}}, \tag{6.12}$$

のようにゲージ群の階数 N に関係する．量子重力の効果はプランク長以下のスケールで重要になるので，これを無視するには，N が大きい極限（ラージ N 極限）をとる必要がある．以上をまとめると，超弦理論には，2 つのパラメーター（弦の長さとプランク長）が存在し，それらが AdS 時空の半径 R よりも十分小さいときに，弦理論の低エネルギー有効理論である超重力理論（もしくは一般相対性理論と思っても本書の範囲では問題がない）で近似することができる．共形場理論の言葉でこの極限は，**ラージ N 強結合の極限**に相当する．このように，AdS/CFT 対応では，ゲージ理論の強結合極限という大変難しい問題を，それよりもずっと簡単な一般相対論という古典的な問題に置き換えるのである．逆にみると，難しい量子重力の問題を，弱結合のゲージ理論に置き換えることもできることも大変興味深い．このような観点からは AdS/CFT 対応をゲージ理論と重力理論の双対性とみなすこともでき，**ゲージ重力対応**とも呼ばれる．

6.4 AdS/CFT 対応の基本原理：バルク／境界関係

AdS/CFT 対応において，どのように両者の物理量が対応するのかという基本原理を与えるのが，**バルク／境界関係**である [60]．この関係式は，一言でいうと両者の分配関数が一致することを表し，以下で与えられる：

$$Z_{\text{重力}}(\phi_i) = \langle e^{i\int d^{d+1}x \mathcal{O}_i(x) J_i(x)} \rangle_{CFT}, \tag{6.13}$$

ここで $Z_{\text{重力}}(\phi_i)$ は，重力理論の分配関数である．ϕ_i は，重力理論中の場すべてを表し，境界で $\phi_i \propto J_i$ という条件を課して，すべての場を経路積分する．また $J_i(x)$ は，共形場理論の演算子 $\mathcal{O}_i(x)$ と結合する外場を意味する．例えば，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は，重力場（計量）$g_{\mu\nu}$ と結合する．(6.13) の左辺は，$e^{i\int d^{d+1}x \mathcal{O}_i(x) J_i(x)}$ の共形場理論における期待値を表す．

特に重力理論を**古典重力で近似できる場合**を考えると（本書で扱う例はほとんどがこのクラスに属す），

$$Z_{\text{重力}}(\phi_i) \simeq e^{iS_{\text{重力}}(\phi_i)}, \tag{6.14}$$

と近似できる．ここで，$S_{\text{重力}}(\phi_i)$ は，前述の境界条件を課して，AdS 時空中で運動方程式を解いた解を重力理論の作用に代入したものを意味する．

共形場理論において基本的な物理量である相関関数は，分配関数を外場 J_i で汎関数微分すれば求まるので，外場中の分配関数を AdS 時空上の重力理論を用いて計算すればよいことになる．また分配関数が分かれば，エネルギーやエントロピーなどの熱力学的量も計算することができる．

さてそれでは，AdS 時空における重力理論の作用 $S_{\text{重力}}$ について説明したい．特に重力場（計量 g）に着目すると，古典重力理論の作用（アインシュタイン・ヒルベルト作用）は，以下のように与えられることは良く知られている：

$$S_{\text{重力}} = \frac{1}{16\pi G_N}\int_M \sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G_N}\int_{\partial M}\sqrt{-h}K. \tag{6.15}$$

ここで，M は考えている重力理論における時空，今の場合は AdS ブラックホール解を意味し，∂M はその境界を表す．右辺最後の境界 ∂M 上の項は，**ギボンズ・ホーキング項**と呼ばれ，h は ∂M の計量，$K = h^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}$ は外曲率 $K_{\alpha\beta}$ のトレースを表す．外曲率 $K_{\alpha\beta}$ は，

$$K_{\alpha\beta} = h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta}\nabla^\gamma n^\delta, \tag{6.16}$$

で定義される．ここで，n^a は，∂M の M の中での法線ベクトルである．つまり，$K_{\alpha\beta}$ は，$\nabla_a n_b$ を ∂M 内に射影したものである．特に座標変換をして $ds^2 = dr^2 + h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ の形に書けたとすると，$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial r}$ と表される．

この作用 (6.15) に対して，計量の変分 $\delta g_{\mu\nu}$ を考えると

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{重力}} \;=\; & \frac{1}{16\pi G_N}\int_M \sqrt{-g}\,\delta g^{ab}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab}\right) \\ & + \frac{1}{16\pi G_N}\int_{\partial M}\sqrt{-h}(K_{\alpha\beta} - Kh_{\alpha\beta})\delta h^{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{6.17}$$

となり，計量の変分が M 上で消えることを要求するとアインシュタイン方程式が得られる．計量の変分は，∂M 上でも消えないと困るが，これは境界 ∂M 上でディリクレ境界条件 $\delta h_{\alpha\beta} = 0$ を課すことで満たされる*2)．このように境界があっても矛盾のない理論が得られるのは，ギボンズ・ホーキング項を導入したからである．

このように得られた重力理論の作用 (6.15) は，AdS 時空の解を代入すると発散してしまう．その原因は前にも触れたように，境界付近で計量が発散するからである．その発散を除去するために，局所的量（体積要素，曲率など）の ∂M 上での積分で与えられる相殺項を $S_{\text{重力}}$(6.15) に足し合わせるという処方

---

*2)　ノイマン境界条件 $K_{\alpha\beta} - Kh_{\alpha\beta} = 0$ を課しても計量の変分がゼロとなる．この時は共形場理論自体が境界のある時空において定義されている場合に相当する．詳細は文献 [61] を参照されたい．

箋をとる．これを**ホログラフィックな繰りこみ**と呼ぶ．

6.5　2 点関数の計算

前節では重力理論における重力場に限定して説明したが，一般にはスカラー場，フェルミオン場，そしてゲージ場などの物質場も存在し，作用が一般座標変換で不変になるように重力場と相互作用する．超弦理論の低エネルギー極限として得られる超重力理論はその重要な例である．そこで，スカラー場を例にとって，スカラー場の作用から共形場理論における 2 点関数の計算を説明したい．$d+2$ 次元 AdS 時空における質量 m の自由スカラー場の作用は，

$$\begin{aligned} S_{\text{スカラー}} &= \int d^{d+2}x\sqrt{-g}(g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + m^2\phi^2) \\ &= R^d \int d^{d+1}x \frac{dz}{z^d}\left((\partial_z\phi)^2 + (\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2R^2}{z^2}\phi^2\right), \end{aligned} \tag{6.18}$$

と書ける．スカラー場の時間 $t = x_0$ と空間 x_i $(i = 1, 2, \cdots)$ に関して，

$$\phi(t, x_i, z) = \int d\omega d^dk\phi(\omega, k_i, z)e^{-i\omega t + ik^ix_i}, \tag{6.19}$$

のようにフーリエ変換するとこの作用から導かれる運動方程式は，

$$\partial_z^2\phi - \frac{d}{z}\partial_z\phi - \left(\frac{m^2R^2}{z^2} + k^2 - \omega^2\right)\phi = 0, \tag{6.20}$$

と表される．

この方程式 (6.20) の厳密な解はベッセル関数を用いて書くことができるが，特に AdS 時空の境界 $z = 0$ の近傍での振る舞いに着目しよう．$\phi \propto z^\Delta$ と z のある冪 Δ 乗で振る舞うと仮定すると，$z = 0$ の極限で，Δ の 2 次方程式 $\Delta(\Delta - d - 1) = m^2R^2$ が得られる．この 2 つの解は

$$\Delta_\pm = \frac{d+1}{2} \pm \sqrt{m^2R^2 + \frac{(d+1)^2}{4}}, \tag{6.21}$$

で与えられ，境界付近 $z \to 0$ での解は，

$$\phi(x_\mu, z) \simeq z^{\Delta_-}(A(x) + \cdots) + z^{\Delta_+}(B(x) + \cdots), \tag{6.22}$$

と表される．ここで省略した $\cdots$ は z に関して高次の項を意味する．

さて，$A(x)$ に比例する項は，境界に近づく極限で他の項よりも大きくなる．特に $m^2 > 0$ であれば発散する．境界近傍は，共形場理論の言葉でいうと紫外極限に相当し，その近傍を変形することは，**外場を加えて理論自体を変形すること**に相当する．このような変形を**正規化不可能な変形** (non-normalizable deformation) と呼ぶ．この ϕ と結合する共形場理論のスカラー演算子を O と書くと，

$$S_{CFT} = \int d^{d+1}xA(x)O(x), \tag{6.23}$$

のように相互作用するはずである．これは，共形場理論が AdS 時空の $z=0$ に存在すると考えると，そこでのスカラー場 ϕ の値が $A(x)$ に比例するからである．

ϕ と結合する O を正確に知るには，一般には超弦理論の知識が必要となるが，例えば分かりやすい例を挙げると，ゲージ理論の結合定数 g_{YM} は AdS 時空内のディラトンと呼ばれるスカラー場を AdS 時空の境界に制限したものに等しい．従って，ゲージ理論の作用は，$S_{YM} \propto \frac{1}{g_{YM}^2}\mathrm{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]$ で与えられるのでゲージ場の運動項 $\mathrm{Tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]$ とディラトンが結合することが分かる．このように，演算子 O は外場と結合するので，ゲージ不変な演算子である必要がある．また一般にスカラー場以外の例を考えても同様のことが成り立ち，AdS 時空における計量やゲージ場と結合するのが，それぞれ，共形場理論のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ とカレント J_μ である．

一方，$B(x)$ のほうは，共形場理論において紫外領域を変えない変形と解釈され，もともと与えられた共形場理論において，有限エネルギーの励起を与えることを意味する．つまり**理論は変えないで，状態を変形すること**を意味する．さらに，実はあとで説明するように，演算子 $O(x)$ の期待値で与えられることが分かる：

$$B(x) \propto \langle O(x)\rangle. \tag{6.24}$$

このような変形を**正規化可能な変形** (normalizable deformation) と呼ぶ．

一般に $d+1$ 次元の共形場理論において，共形次元 Δ の演算子による変形 $\int d^{d+1}xO(x)$ を考えると，繰りこみ群の長さのスケールを L とすると，その変形は $L^{d+1-\Delta}$ に比例して変化する．AdS 時空における座標 z がちょうどこの長さスケール L と同一視できることを考慮すると，O と結合するスカラー場 (6.22) の振る舞いと比較することで，O の共形次元は，

$$\Delta = \Delta_+ = d+1-\Delta_- = \frac{d+1}{2} + \sqrt{m^2R^2 + \frac{(d+1)^2}{4}}, \tag{6.25}$$

であることが分かる．

共形次元が正の実数であるべきことから

$$m^2R^2 \geq -\frac{(d+1)^2}{4}, \tag{6.26}$$

という条件が得られる．この条件を満たさないとスカラー場 ϕ の振る舞いが悪くなり，AdS 時空も摂動に対して不安定になる．この AdS 時空が安定になる条件を，**ブレートノーマー・フリードマン・バウンド**（略して BF バウンド）と呼ぶ．このように，$m^2<0$ つまり，**タキオンであっても BF バウンドを満たせば AdS 時空では安定に存在する．**

この不安定性を直感的に理解するために，方程式 (6.20) を新しく $\psi = z^{-d/2}\phi$ を定義して書き直してみると

$$
\begin{aligned}
&-\partial_z^2\psi + V(z)\psi = \omega^2\psi, \\
&V(z) = \frac{m^2R^2 + \frac{(d+1)^2-1}{4}}{z^2} + k^2,
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

のようにシュレディンガー方程式で表される．$V(z)$ が負に発散して，粒子が $z=0$ に落ち込んでいかないという古典的安定性の条件は，$m^2R^2 + \frac{(d+1)^2-1}{4} \geq 0$ で与えられるが，これは BF バウンド (6.26) を近似的に再現する．実際に，シュレディンガー方程式を厳密に解くことで量子効果を取り入れると，(6.26) の条件を正しく導くことができる．また，もう一つ重要なこととして，BF バウンド (6.26) を十分満たす場合には，ポテンシャル $V(z)$ は境界 $z=0$ で正に発散する．このことから，一般に AdS 時空に摂動を加えると，境界で反射されることが分かり，つまり AdS 時空内部の場は**あたかも箱の中に入っているかのように振る舞う**ことが分かる．

共形次元 Δ が時空の次元 $d+1$ より大きい時には低エネルギー極限で，その変形は無視でき，逆に $d+1$ より小さければとても大きくなる．前者と後者をそれぞれ**レレバント**，**イレレバントな演算子**と呼び区別する．その境界 $\Delta = d+1$ を**マージナル**と呼ぶ．従って，AdS/CFT 対応では，マージナルな演算子は，質量がゼロの場に相当し，$m^2 < 0$ のタキオン場がレレバント，$m^2 > 0$ の場がイレレバントな演算子にそれぞれ対応する．

もっと細かいことを言うと，

$$
-\frac{(d+1)^2}{4} \leq m^2R^2 \leq -\frac{(d+1)^2}{4} + 1, \tag{6.28}
$$

の領域では，$z \to 0$ における振る舞いが緩やかなので，$A(x)$ のモードと $B(x)$ のモードは，ともに正規化可能な変形とみなされることが知られている[62]．この場合に限っては，$A(x)$ と $B(x)$ の役割を入れ替えることが可能である．

それでは 2 点関数の計算に移りたいが，計算しやすくするために共形場理論が定義されている $d+1$ 次元時空をユークリッド化して取り扱うことにする．この場合には，赤外極限 $z \to \infty$ において場がスムーズに振る舞う，つまり発散しないという境界条件から $A(x)$ を与えると，$B(x)$ も一意に決まる．従って，$\phi(x,z)$ が $A(x)$ で完全に決まることになり，それは式で書くと

$$
\phi(x,z) = \int dy^{d+1} K_\Delta(z,x,y)A(y), \tag{6.29}
$$

となる．この時に境界バルクの伝播関数と呼ばれる K_Δ は，

$$
K_\Delta(z,x,y) = \frac{\pi^{-(d+1)/2}\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta-(d+1)/2)} \cdot \frac{z^\Delta}{(z^2+(x-y)^2)^\Delta}, \tag{6.30}
$$

と定義される．確かに運動方程式を満たし，$z \to \infty$ で発散しないことが分か

る．この表式を，スカラー場の作用 (6.18) に代入すると，

$$S_{\text{スカラー}} = \int d^{d+1}x\ z^{-d}\phi\partial_z\phi|_{z\to 0}$$
$$\propto \int d^{d+1}xdy^{d+1}\frac{A(x)A(y)}{|x-y|^{2\Delta}}, \tag{6.31}$$

と評価できる．1 行目では，運動方程式の解であることを用いて部分積分を行うと，境界上の積分として書けることを用いた．

以上のようにして，(6.31) を A で 2 回微分することで 2 点関数を求めると

$$\langle O(x)O(y)\rangle = -\frac{\delta^2 S_{\text{スカラー}}}{\delta A(x)\delta A(y)} \propto |x-y|^{-2\Delta}, \tag{6.32}$$

となる．この振る舞いは，前に説明した共形場理論から従う結果 (4.24) と一致していることが分かる．

また，(6.29) を $z=0$ の近傍で展開することによって，

$$B(x) = \pi^{-(d+1)/2}\frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta-(d+1)/2)}\int dy^{d+1}\frac{A(y)}{|x-y|^{2\Delta_O}}, \tag{6.33}$$

と表されることが分かるが，2 点関数 (6.32) を用いると

$$B(x) \propto \int dy^{d+1}A(y)\langle O(x)O(y)\rangle = \langle O(x)\rangle_{\text{外場}}, \tag{6.34}$$

であることが分かる．ここで，$\langle O(x)\rangle_{\text{外場}}$ は，$A(x)$ の外場がある状況における $O(x)$ の一点関数を表す．このようにして，$B(x)$ が演算子 O の期待値を表しているという前述の事実を確かめることができた．

6.6 AdS/CFT 対応とブラックホール

AdS 時空は (6.9) の変換で不変なので，どの z の値を見ても同じスライスが得られる．これはホログラフィックな理論が共形不変であることに対応する．そこでさらに一般化して，AdS/CFT 対応をスケール不変性がない場合に拡張するとより非自明な対応が得られると思われる．この対応は大雑把に言って，$d+1$ 次元の場の理論の構成要素をエネルギースケール E で分類し，それぞれの情報を AdS_{d+2} の $z \sim \frac{1}{E}$ のスライスに書き込む（＝計量や物質場を変形させる）ことを意味する．特に，境界付近 $z \to 0$ で AdS 時空に近づく場合を**漸近的に AdS な時空**と呼ぶ．この漸近的に AdS な時空と双対の場の理論は，紫外極限で共形不変な理論（共形固定点とも呼ぶ）に近づく．そこで，AdS/CFT 対応は，このような漸近的に AdS な時空に対しても自然に拡張されると考えられる．

その代表的な例が，AdS 時空におけるブラックホールである．特に，$(d+2)$ 次元の AdS 時空におけるシュワルツシルド・ブラックホールの計量は，

$$ds^2 = -R^2 \frac{f(z)}{z^2} dt^2 + R^2 \frac{dz^2}{z^2 f(z)} + \frac{R^2}{z^2}(dx_1^2 + \cdots + dx_d^2),$$
$$f(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_H}\right)^{d+1}, \tag{6.35}$$

で与えられる．特に $z_H = \infty$ のときは，計量はポワンカレ座標の AdS_{d+2} と同じになる．一般に $z = z_H (> 0)$ はブラックホールの地平線になっていることが分かり，一方境界近く $z \to 0$ では AdS_{d+2} に近づき，漸近的に AdS である．

ユークリッド化した空間が $z = z_H$ で特異点を持たないことを要請すると，ユークリッド時間 $t_E = it$ の周期 β は，

$$\beta = \frac{4\pi}{d+1} z_H, \tag{6.36}$$

と決まる．従って AdS/CFT 対応において，このブラックホール時空は同じ温度 $T = \frac{1}{\beta}$ の共形場理論に対応する [60], [63]．有限温度の場の理論は，時間をユークリッド化して，時間方向を周期 β で同一視する $(t \sim t + \beta)$ ことで得られるので，ユークリッド化した AdS ブラックホールの境界 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{S}^1$ と確かに一致する．

さてそれでは，具体的にこのブラックホール解を用いて，AdS/CFT 対応によって予言される共形場理論の熱力学を計算してみよう．まずバルク／境界対応を用いて，自由エネルギー F を計算してみよう．重力理論の分配関数は量子効果を無視して古典論で近似すると，

$$Z_{\text{重力}} \simeq e^{-S_E}, \tag{6.37}$$

で与えられる．ここで，S_E はユークリッド化したブラックホール解を重力理論の作用に代入した値である．このことから，ブラックホールの自由エネルギー F は，以下のように求められる：

$$\beta F = S_E - S_E^{(0)}. \tag{6.38}$$

ここで，$S_E^{(0)}$ は，温度ゼロ（基底状態）の AdS 時空そのもの（pure AdS とも呼ぶ）に対する作用の値を意味する．今考えている自由エネルギーは，基底状態から測ってどの程度エネルギーが高いかを考えているので，このように基底状態の値を引いておく必要があるのである．

ユークリッド化した時空におけるアインシュタイン・ヒルベルト作用は，

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_M \sqrt{g}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial M} \sqrt{h} K \tag{6.39}$$

で与えられる．作用 S_E は，共形場理論の連続極限 $\epsilon \to 0$ で発散する．これは，AdS 時空の境界の位置において計量が発散するからであることは既に説明した通りである．さて，この作用 S_E は，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{16\pi G_N}\int_M \sqrt{g}(R-2\Lambda)\\
&=-\frac{\beta V_d}{16\pi G_N}\int_\epsilon^{z_H} dz\left(-\frac{2(d+1)}{R^2}\right)\frac{R^{d+2}}{z^{d+2}}\\
&=\frac{R^d V_d \beta}{8\pi G_N}\cdot\left(\frac{1}{\epsilon^{d+1}}-\frac{1}{z_H^{d+1}}\right), \qquad (6.40)
\end{aligned}
$$

と計算できる．ここで，V_d は，境界上の空間の（無限大の）体積を表す．境界 ∂M からの寄与は，(6.35) に対しては，S_E と $S_E^{(0)}$ で相殺することが分かるので無視している．

$S_E^{(0)}$ の計算は注意が必要で，$z=\epsilon$ におけるユークリッド時間の周期の長さを合せる必要があり，この場合の周期を $\beta^{(0)}$ と書くと，

$$
\beta^{(0)}=\beta\left(1-\frac{\epsilon^{d+1}}{2z_H^{d+1}}+O(\epsilon^{2(d+1)})\right), \qquad (6.41)
$$

と決められる．

以上より，自由エネルギーは

$$
\begin{aligned}
\beta F &= \frac{R^d V_d\beta}{8\pi G_N}\cdot\left(\frac{1}{\epsilon^{d+1}}-\frac{1}{z_H^{d+1}}\right)-\frac{R^d V_d \beta}{8\pi G_N \epsilon^{d+1}}\left(1-\frac{\epsilon^{d+1}}{2z_H^{d+1}}\right)\\
&=-\frac{R^d V_d}{4(d+1)G_N z_H^d}, \qquad (6.42)
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
F=-\frac{R^d V_d}{16\pi G_N}\left(\frac{4\pi}{d+1}\right)^{d+1}T^{d+1}, \qquad (6.43)
$$

と求められる．さらにエントロピーは，

$$
S=-\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{R^d V_d}{4G_N}\left(\frac{4\pi T}{d+1}\right)^d=\frac{R^d V_d}{4G_N z_H^d}=\frac{\text{地平線の面積}}{4G_N}, \qquad (6.44)
$$

と計算され，ベッケンシュタイン・ホーキング公式と確かに一致する．また，エネルギーは，

$$
E=F+TS=\frac{dR^d V_d}{16\pi G_N}\left(\frac{4\pi}{d+1}\right)^{d+1}T^{d+1}, \qquad (6.45)
$$

と求められる．エネルギーが温度の正冪に比例するので，この AdS ブラックホールの比熱 $C=\frac{dE}{dT}$ が正であることが分かる．なぜこのことを強調するかというと，実は第 5 章で取り上げた平坦な時空におけるブラックホールは比熱が負になるからである．その意味で平坦な時空のブラックホールは熱力学的に不安定であり，ホログラフィー原理を考える上で良い例とは言えない．しかし，AdS 時空におけるブラックホールは，今見た例のように熱力学的に安定となる

ことが多く[*3)]，ホログラフィー原理を適用するのに適している．このように，AdS 時空のブラックホールが安定になる理由は，前に説明したように AdS 時空は箱のような構造しているので，ブラックホールから熱が流れようとしても，境界で反射して戻ってくるからであると考えられる．

さて，具体例として AdS/CFT 対応の最も基本的な例であるタイプ IIB 超弦理論における $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ の時空を考えよう．この場合，双対な理論は有限温度 4 次元 $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ 超対称性ゲージ理論ということになる．この場合は，(6.44) は，(6.11) を用いて

$$S = \frac{1}{2}\pi^2 N^2 V_3 T^3, \tag{6.46}$$

と書き直せる．

QCD のようなゲージ理論では，強い相互作用で互いがひきつけられて離れられないという，いわゆる**閉じ込め**の現象が低温で起こる．しかし今の系は，任意の温度で実は閉じ込めは起きず，ゲージ場などのすべての場は自由に動き回れることが分かる．これは，前に計算したエントロピー (6.46) が，ゲージ群の階数（カラー自由度）N の 2 乗に比例していることから，ゲージ群の随伴表現に属す場が単体で存在し，自由に飛び回っていることを意味する．

エントロピーは，示量的な量なので，空間体積 V_3 に比例し，全体として無次元な量なので，温度の 3 乗に比例することも分かる．その無次元の比例係数は，前述のように場の数 N^2 に比例するが，結合定数（トフーフト結合定数）にも依存する：

$$S = N^2 f(\lambda) V_3 T^3. \tag{6.47}$$

結合定数がゼロの極限では，自由場としてエントロピーを通常の統計力学を用いて計算することが容易であり，その結果は $f(0) = \frac{2}{3}\pi^2$ となる．これは強結合極限に相当する重力の計算 (6.46) で得られた値 $f(\infty) = \frac{\pi^2}{2}$ よりも 4/3 倍大きい．これは直感的に言うと，相互作用によって粒子が引きつけ合う力が生じ，少しだけ動き回りにくくなるからである．

6.7 ホログラフィックなエネルギー運動量テンソル

場の理論のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は，(4.15) のように作用を計量で変分することで得られる．AdS/CFT 対応のバルク／境界対応を用いると，共形場理論の $T_{\mu\nu}$ を，運動方程式を課した時の重力作用の変分として計算することができる．

座標変換の自由度を用いると漸近的に AdS な時空は，以下のような計量で

*3) 比熱が負になる場合もあるがその場合はやはり熱力学的に不安定であり，別に安定な解が存在し，そちらを考えるべきである．

記述することができる（**グラハム・フェファーマン座標**と呼ばれる）：

$$ds^2 = R^2 \frac{d\rho^2}{4\rho^2} + \frac{g_{\mu\nu}(\rho, x)}{\rho} dx^\mu dx^\nu. \tag{6.48}$$

境界は，$\rho = 0$ に相当する．このときに，AdS/CFT 対応で計算した $T_{\mu\nu}$ （**ホログラフィックなエネルギー運動量テンソル**）は以下で与えられる：

$$T_{\mu\nu} = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{\rho^{-d/2+1/2}}{8\pi G_N} (K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} K) + (\text{相殺項}) \right). \tag{6.49}$$

ここで，最後の項は，重力理論の作用に加えた発散の相殺項からの寄与を表す．

特に，∂M が平坦，つまり $g_{\mu\nu}(0, x)$ がミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ にとれる場合は，

$$T_{\mu\nu} = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{\rho^{-d/2+1/2}}{8\pi G_N} (K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} K - \frac{d}{R} h_{\mu\nu}) \right), \tag{6.50}$$

と書ける．また，(6.48) における $g_{\mu\nu}$ の境界近傍での振る舞いを

$$g_{\mu\nu}(\rho, x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{\hat{t}_{\mu\nu}}{R^2} \rho^{\frac{d+1}{2}} + O(\rho^{d/2+1}), \tag{6.51}$$

とすると，ホログラフィックなエネルギー運動量テンソルは，

$$T_{\mu\nu} = \frac{(d+1)R^d}{16\pi G_N} \hat{t}_{\mu\nu}, \tag{6.52}$$

と求められる．言い換えると，共形場理論のエネルギー運動量テンソルは，考えている重力理論の計量が AdS 時空からどれだけずれているのか境界近傍で測った量に相当している．正確に AdS 時空に等しい時空を考えているときは，$T_{\mu\nu} = 0$ となり，これは基底状態に相当する．

例として，前述の AdS ブラックホール (6.35) をとると，(6.48) で定義される ρ は，

$$\rho = \frac{z^2}{R^2} \left(1 + \frac{1}{d+1} \cdot \frac{z^{d+1}}{z_H^{d+1}} + O(z^{d+2}) \right), \tag{6.53}$$

と z で表される．このことを用い，(6.51) の $\hat{t}_{\mu\nu}$ を計算することでエネルギー運動量テンソル (6.52) を求めると非自明な成分は以下の通りである：

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{dR^d}{16\pi G_N} \left(\frac{4\pi}{d+1} \right)^{d+1} T^{d+1}, \\ T_{x_i x_i} &= \frac{R^d}{16\pi G_N} \left(\frac{4\pi}{d+1} \right)^{d+1} T^{d+1}. \end{aligned} \tag{6.54}$$

この結果から，$T_{\mu\nu}$ はトレースがゼロ $\eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$ であることが分かる．これは，第 4 章で説明したように共形場理論では必ず成り立つべき性質である．

第 7 章
ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの基礎

さて本章では，エンタングルメント・エントロピーの AdS/CFT 対応を用いたホログラフィックな計算 [16] を紹介する．まず初めにその計算公式を説明し，具体例における計算を行う．その後でどうしてそのような公式で計算できるのか，計算公式を AdS/CFT 対応の原理から導出する [64]．

7.1 ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

これまで説明したように，AdS/CFT 対応によると，$d+2$ 次元 AdS 時空における重力理論は，その境界に定義された $d+1$ 次元共形場理論と等価な理論となる．この対応は，ホログラフィー原理の特別な場合に相当する．従って，より一般のホログラフィー原理を理解する上でも AdS/CFT 対応の基本的な成り立ちをより深く理解することは重要である．

そのような基本的な問いの一つが，AdS/CFT 対応において「共形場理論の時刻 t における，ある空間領域 A の情報が AdS 時空の重力理論のどの領域に記録されているのか？」という疑問である．領域 A に制限した情報は，A に制限された密度行列 ρ_A で表される．従って，領域 A の情報量を，エンタングルメント・エントロピー $S_A = -\mathrm{Tr}[\rho_A \log \rho_A]$ として表すことができる．

このように考えて，先ほど挙げた問題を定量的に扱えるように言い直すと，「共形場理論の領域 A に対する時刻 t のエンタングルメント・エントロピー S_A は，AdS 時空の重力理論でどのように計算できるのか？」という問題になる．本書の大部分で仮定しているように，重力理論を古典的に取り扱うことができる場合（古典重力近似）を考える．また，本章では簡単のため，考えている漸近的に AdS な時空が時間に依存しない場合を考える．時間に依存する背景におけるエンタングルメント・エントロピーの計算法は，次章で扱う．

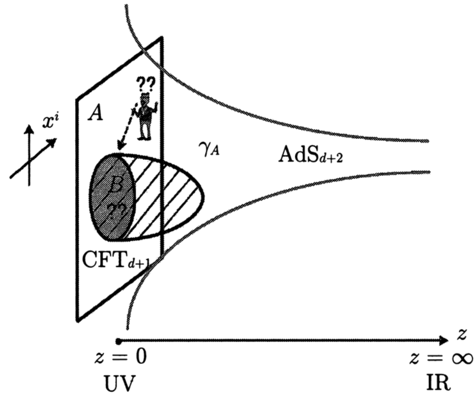


図 7.1　ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式．純粋状態の場合は $S_A = S_B$ なので，A と B を入れ替えてもエンタングルメント・エントロピーは変化しないことに注意．

7.1.1　ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式

先ほどの問いに対して答えを与えるのが**ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式**であり[16]，この公式は以下のような簡単な式で与えられる：

$$S_A = \frac{\gamma_A\text{の面積}}{4G_N}. \tag{7.1}$$

ここで γ_A は以下のように定義される．まず，γ_A は $d+2$ 次元の漸近的 AdS 時空内部の d 次元の空間的曲面であり，その境界は A の境界に一致する（つまり $\partial\gamma_A = \partial A$）ようにとる．さらに A と γ_A はトポロジカルに同じ空間，もっと正確には数学のホモロジーの立場で同じであることを要求する（ホモロジー条件と呼ぶ）．この条件を満たす曲面は無限に存在するが，その中でも特に**面積を最小にするという条件を課す**．このような曲面は**極小曲面 (minimal surface)** と呼ばれ，ただ一つ定まる．図 7.1 を参照されたい．このとき面積を計算する際には，重力作用がアインシュタイン・ヒルベルト作用の形 (6.15) となる，いわゆるアインシュタイン・フレームを用いる必要がある．

重要な補足であるが，**面積を最小にする際には時刻 t が一定の $d+1$ 次元空間（時間一定面）の上で最小にする**．何故なら，時間方向も含むとヌル方向に曲面が伸びると，面積がゼロになってしまうという問題が起きるからである．もしくは **AdS 時空自体をユークリッド化して，極小曲面を探しても良い**．

直感的に (7.1) の公式は，AdS 時空における極小曲面をあたかもブラックホールの地平線のように思って，ベッケンシュタイン・ホーキングのブラックホールエントロピーを計算したものと思うこともできる．共形場理論において観測

者が A に置かれており，それ以外の領域として定義される領域 B の情報に観測者がアクセスできないという状況は，AdS/CFT 対応を用いると AdS 時空において，γ_A に地平線を持つブラックホールのようなものが存在し，その内部を隠しているという状況とみなせるのである．

実際に，後で見るように AdS ブラックホール時空において，A の大きさが大きい場合は極小曲面が一般にブラックホールの地平線に巻き付き，(7.1) は，ベッケンシュタイン・ホーキング公式に帰着するのである．しかしながら，極小曲面はブラックホールの地平線と比べてはるかに一般的な曲面である．幾何学的に説明すると，ベッケンシュタイン・ホーキング公式をそのまま適用できる時間に依存しないブラックホールに対しては，地平線（キリング地平線と呼ばれる）において外曲率のすべての成分がゼロになるが，極小曲面においては，外曲率のトレース部分がゼロになるだけであるからである．つまり，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式はブラックホールのエントロピーを大きく一般化したものと思えるのである．

7.1.2 面積則のホログラフィックな導出

以上のように定義される (7.1) の公式が，面積則 (3.21) を満たしていることはすぐに示せる．実際に極小曲面 γ_A の面積を計算すると，計量が $z=0$ で発散しているので面積も発散することが分かる．そこで AdS/CFT 対応における紫外発散の取り扱いを思い出し，微小量 ϵ を用いて，z を $z>\epsilon$ に制限する．つまり z にカットオフを入れることにする．この時，ϵ は長さのスケールにおける紫外カットオフ，離散的な理論の言葉で言い換えると格子間隔の大きさに相当する．

このようにカットオフを入れた状況で面積を計算すると最も大きな寄与は計量が大きい値をとる境界付近から来ることになり，その大きさを見積もると

$$
\begin{aligned}
S_A &\sim \frac{R^d}{G_N}\cdot[\text{境界}\partial A\text{ の面積}]\cdot\int_\epsilon \frac{dz}{z^d}\\
&\sim \frac{R^d}{G_N}\cdot\frac{\text{境界}\partial A\text{ の面積}}{\epsilon^{d-1}},
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

となり面積則が確かに導ける．ここで，R^d/G_N は無次元の量で，後の具体例で詳しく調べるように，場の数（より正確には中心電荷）に比例する．特にラージ N ゲージ理論では，$R^d/G_N \propto N^2$ と振る舞う．

7.2 2次元共形場理論のエンタングルメント・エントロピー

ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの感じをつかむために取り扱いが最も簡単な $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ のセットアップでエンタングルメント・エントロピーの計算を説明したい．

7.2.1 無限に伸びた空間におけるエンタングルメント・エントロピー

まず，無限に伸びた 1 次元空間と時間からなる 2 次元共形場理論を考えよう．部分系 A を長さ l の線分として定義する．この時のエンタングルメント・エントロピー S_A を計算したい．共形場理論は $\mathbf{R}^{1,1}$ で定義されており，この時空を境界に持った AdS 時空を用いるべきなので，3 次元のポワンカレ AdS 時空を考えることにする．式 (6.6) において $d = 1$ とし，$x_0 = t, x_1 = x$ と置くと，

$$ds^2 = R^2 \left(\frac{dz^2 + dx^2 - dt^2}{z^2} \right). \tag{7.3}$$

の計量が得られる．3 次元時空においては γ_A は 1 次元の曲線となる．従って，この 3 次元 AdS 時空の中で時間一定面 $t = t_0$ を選び，次の 2 つの点 P, Q：

$$\begin{aligned} P &: (t, x, z) = (t_0, -\frac{l}{2}, \epsilon), \\ Q &: (t, x, z) = (t_0, \frac{l}{2}, \epsilon), \end{aligned} \tag{7.4}$$

をつなぐ測地線 γ_A の長さを計算すれば S_A を求めることができる．結果は考えている時刻 t_0 によらないので，$t_0 = 0$ とおいてもかまわない．ϵ は，前述のように紫外カットオフを考慮した場合の AdS 時空の境界を表す．

このような測地線は，P と Q をつなぐ半円：

$$z = \sqrt{l^2/4 - x^2}, \tag{7.5}$$

で与えられることが分かる．この事実の証明は，次の節で一般次元に対して行うので，ここでは省略する．この測地線上に誘導される計量は，$x = \pm\sqrt{l^2/4 - z^2}$ を (7.3) に代入して

$$ds^2 = \frac{R^2 l^2 dz^2}{z^2(l^2 - 4z^2)}, \tag{7.6}$$

を得る．γ_A の面積は，積分 $\int_{\gamma_A} ds$ によって与えられるので，S_A は (7.1) に従って，

$$S_A = \frac{2Rl}{4G_N} \int_\epsilon^{l/2} \frac{dz}{z\sqrt{1 - 4z^2/l^2}} = \frac{R}{2G_N} \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right), \tag{7.7}$$

と計算される．z の積分で表すと，$x > 0$ と $x < 0$ の両方の寄与を取り入れるために 2 倍する必要があることに注意．

さらに，AdS_3/CFT_2 で良く知られている次の一般的な関係式 [65]

$$c = \frac{3R}{2G_N}, \tag{7.8}$$

によって 2 次元共形場理論の中心電荷 c と AdS 時空の半径 R が関係づくことを用いると，ホログラフィックな計算 (7.7) は共形場理論で知られた結果 (4.66) を正しく再現することが分かる．このようにしてホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式 (7.1) が 2 次元共形場理論に対して正しい結

果を与えることを確かめることができた．ここで用いた (7.8) の関係式は大きな AdS 時空を考えると，それだけ共形場理論も大きな自由度を持つという直感的にも理解しやすい関係を表している．この式の導出は，原論文[65] を参照していただきたいが，簡単に言うと 3 次元 AdS 時空では，ビラソロ代数を満たす演算子を時空の座標変換として構成でき，その交換関係から中心電荷 c を計算することで (7.8) が導かれるのである．

7.2.2 円周上のエンタングルメント・エントロピー

さて，次の例として 1 次元空間を円周にコンパクト化した時のエンタングルメント・エントロピーの計算を考えよう．円周の長さを L とし，この円周上の長さ l の線分を部分系 A とした場合にエンタングルメント・エントロピー S_A を計算したい．

ホログラフィックな計算を行うためには，境界が円筒 $\mathbf{R}\times\mathbf{S}^1$ で与えられる大域的な AdS_3 を考えればよい．計量は (6.4) で与えられる．円周方向 Ω_1 を周期 2π の座標 θ で表すと，計量は

$$ds^2 = R^2(-\cosh^2\rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho d\theta^2), \tag{7.9}$$

と表される．AdS の境界は $\rho\to\infty$ に相当し，紫外カットオフを $\rho<\rho_\infty$ のように導入すると実際のカットオフ ϵ とは

$$e^{\rho_\infty} \sim \frac{L}{\epsilon}, \tag{7.10}$$

の関係があることが分かる．この関係は大域的な AdS 時空を，境界近傍で局所的に座標変換してポワンカレ AdS 時空に変換して比較することで導くことができる．

部分系 A は，境界における θ の線分：$0\le\theta\le 2\pi\frac{l}{L}$ で表すことができる．ここで共形場理論においては，それぞれの長さには物理的な意味がなく，l/L のような長さの比だけ意味があることに注意．従って，S_A を計算するには，AdS_3 の時刻 t 一定面における $\theta=0$ と $\theta=2\pi\frac{l}{L}$ をつなぐ測地線の長さを計算すればよい．このために (6.2) のように 4 次元時空 $\mathbf{R}^{2,2}$ における超曲面としての記述を利用しよう．

一般に，AdS_{d+2} の測地線は，$\mathbf{R}^{2,d+1}$ の中で，2 次元平面と AdS_{d+2} が交わる部分空間として記述できることが知られている．この事実を用いると今考えている測地線は λ をパラメーターとして $\mathbf{R}^{2,2}$ 内のベクトル $\vec{X}$ の軌跡として以下のように表される：

$$\vec{X} = \frac{R}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\lambda/R)\cdot\vec{x} + R\left[\cosh(\lambda/R) - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\sinh(\lambda/R)\right]\cdot\vec{y}, \tag{7.11}$$

ここで $\alpha = 1 + 2\sinh^2\rho_\infty \sin^2(\pi l/L)$ とおいた．また $\mathbf{R}^{2,2}$ におけるベクトルである $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を以下のように定義した：

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (\cosh\rho_\infty \cos t, \cosh\rho_\infty \sin t, \sinh\rho_\infty, 0),\\ \vec{y} &= (\cosh\rho_\infty \cos t, \cosh\rho_\infty \sin t, \sinh\rho_\infty \cos(2\pi l/L), \sinh\rho_\infty \sin(2\pi l/L)).\end{aligned} \tag{7.12}$$

このとき，測地線の長さは

$$長さ = \int_{\gamma_A} ds = \int d\lambda = \lambda_*, \tag{7.13}$$

のように γ_A の両端点におけるパラメーター λ の差 λ_* で与えられる．この λ_* は，

$$\cosh(\lambda_*/R) = 1 + 2\sinh^2\rho_\infty\ \sin^2\frac{\pi l}{L}, \tag{7.14}$$

であることが分かる．

紫外カットオフがとても大きい極限 $e^{\rho_\infty} \gg 1$ をとることを考慮して，以上の結果より S_A をホログラフィックな公式 (7.1) と (7.8) の関係を用いて，

$$S_A \simeq \frac{R}{4G_N}\log\left(e^{2\rho_\infty}\sin^2\frac{\pi l}{L}\right) = \frac{c}{3}\log\left(\frac{L}{\epsilon}\sin\frac{\pi l}{L}\right), \tag{7.15}$$

と計算できる．この結果は，2 次元共形場理論の計算 (4.79) と一致する．

7.2.3 ギャップがある系の場合

共形場理論に共形不変性を破る相互作用を加えた場合についても触れておこう．既に説明したように，繰りこみ群の立場で，レレバントな変形をした場合に低エネルギーで非自明な変化が生じる．共形場理論では場の質量はゼロであるが，特に質量項を加えると低エネルギー極限でその場を励起することはできなくなり，何も存在しない自明な理論になる．このように質量を持つ理論を，(質量）ギャップのある理論とも呼ぶ．

2 次元共形場理論に質量を与える変形を行った場合を考えよう．質量の値を m とすると，その逆数 $\xi = 1/m$ が相関長を与える．この理論の AdS/CFT 対応を考えると，ξ より長波長のモードの励起が存在しないはずなので，AdS 時空から $z > \xi$ の部分が取り除かれたような時空になっていると期待される．実際には，$z = \xi$ 近傍でスムーズに時空が消えるような解を用いるべきだが（実際そのような解はいくつも知られている)，以下の目的のためには，近似的に AdS_3 を $z < \xi$ に制限したものと考えれば十分である．

このホログラフィックなセットアップにおいて，部分系 A を半直線 $x > 0$ に取った場合にエンタングルメント・エントロピーを計算しよう．この場合は，γ_A はシンプルで，$x = 0$ にそって，$\epsilon < z < \xi$ に伸びた線分となる．従って，(7.1)

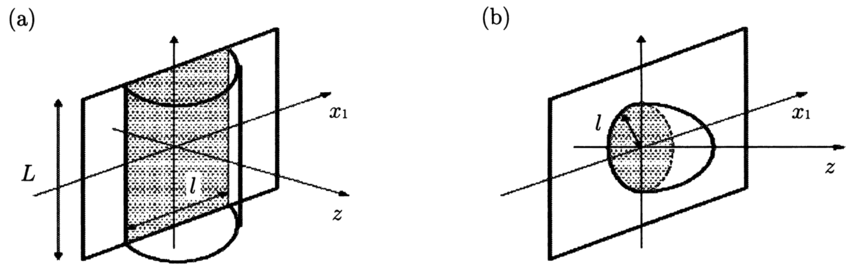


図 7.2 極小曲面の具体的な形．左図：部分系が (a) 帯状，右図：部分系が (b) 球状．（文献 [16] より．）

を用いて，

$$S_A = \frac{R}{4G_N}\int_\epsilon^\xi \frac{dz}{z} = \frac{c}{6}\log\frac{\xi}{\epsilon}, \tag{7.16}$$

となり，知られた結果 (3.22) を再現する．

7.3 高次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピー

次に高次元 ($d \geq 2$) の共形場理論におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの計算を説明したい．2 次元 ($d = 1$) の場合は，共形場理論の解析から計算結果をすでに知っていたが，高次元の場合は解析的な結果は一般に知られていないので，以下で議論する一部の項を除いて，ホログラフィックな結果と場の理論の結果を比較することは困難である．逆に言うと AdS/CFT 対応を用いることでエンタングルメント・エントロピーが初めて計算可能となる例が多々あるのである．

以下では，$d+1$ 次元における共形場理論が $\mathbf{R}^{1,d}$ 上で定義されている場合を考え，部分系 A が帯状の場合と球状の場合について S_A のホログラフィックな計算を説明したい．AdS/CFT 対応を適用して，ポワンカレ AdS 時空における重力理論を考えることになる．

7.3.1 部分系 A が帯状の場合

まず，図 4.4(a) のように部分系 A が，無限に伸びる帯状の領域で与えられる場合を考える．ポワンカレ AdS の計量 (6.6) において，境界の座標は $(x_0, x_1, \cdots, x_d)$ であるが，$x_2, x_3, \cdots, x_d$ の方向には無限に伸びていて（その無限の長さを L と書く），x_1 の方向は長さ l の線分：$-l/2 \leq x_1 \leq l/2$ で与えられるとする．以下 x_1 を x と書くことにすると，極小曲面 γ_A は，$z = z(x)$ という形で与えられる．図 7.2(a) を参照されたい．そこで以下では，面積を最小にする条件を課して $z(x)$ を求めたい．

面積は以下のような積分で与えられる：

$$\text{面積} = R^d L^{d-1} \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{\sqrt{1+(\frac{dz}{dx})^2}}{z^d}. \tag{7.17}$$

x を時間と思った時のハミルトニアンが保存する事実から，次の方程式：

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{z_*^{2d} - z^{2d}}}{z^d}, \tag{7.18}$$

を導ける．ここで，z_* は積分定数である．

従って，l と z_* の関係は，

$$\frac{l}{2} = \int_0^{z_*} dz \frac{z^d}{\sqrt{z_*^{2d} - z^{2d}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+1}{2d})}{\Gamma(\frac{1}{2d})} z_*. \tag{7.19}$$

で与えられる．ここで以下の積分公式を用いた：

$$\int_0^1 dx x^{\mu-1}(1-x^\lambda)^{\nu-1} = \frac{B(\mu/\lambda, \nu)}{\lambda}, \qquad B(x,y) \equiv \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y). \tag{7.20}$$

従って，γ_A の面積は，

$$\text{面積} = \frac{2R^d}{d-1}\left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} - 2IR^d\left(\frac{L}{z_*}\right)^{d-1}. \tag{7.21}$$

ここで，I は次のように定義される．

$$I = \frac{1}{d-1} - \int_0^1 \frac{dy}{y^d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^{2d}}} - 1\right) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1-d}{2d})}{2d\,\Gamma(\frac{1}{2d})} > 0, \tag{7.22}$$

である．

このようにして S_A を以下のように求められる：

$$S_A = \frac{R^d}{4G_N}\left[\frac{2}{d-1}\left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} - \frac{2^d\pi^{d/2}}{d-1}\left(\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2d})}{\Gamma(\frac{1}{2d})}\right)^d\left(\frac{L}{l}\right)^{d-1}\right]. \tag{7.23}$$

さて，(7.23) 右辺の最初の項は面積則の発散項 (3.21) を表す．2 つ目の項は有限であり，カットオフ ϵ の選び方に依存せず，普遍的量を与える重要な項である．この関数形 (7.23) は自由場の理論で確かめた結果 (4.116) と一致している．この AdS/CFT 対応を用いた解析は，(4.116) の表式が相互作用が入った場合にも正しいことを示している．

7.3.2 部分系 A が球状の場合

次に，部分系 A が半径 l の球体内部で与えられる場合について S_A を計算したい．まず，$\mathbf{R}^d$ の極座標を

$$\sum_{i=1}^d dx_i^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \tag{7.24}$$

のように導入すると，極小曲面 γ_A は，$r = r(z)$ で指定することができる d 次元の曲面である．$z(r)$ の関数形は，面積汎関数：

$$\text{面積} = R^d \cdot \mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1}) \cdot \int_0^l dr r^{d-1} \frac{\sqrt{1+(\frac{dz}{dr})^2}}{z^d}, \tag{7.25}$$

を最小化することで求められる．これから従う運動方程式は，

$$rzz'' + (d-1)z(z')^3 + (d-1)zz' + dr(z')^2 + dr = 0, \tag{7.26}$$

とかける．

単純な計算で，

$$r^2 + z^2 = l^2, \tag{7.27}$$

が確かに (7.26) を満たしていることが分かる．この簡単な解 (7.27) は，γ_A が球面の半分で与えられることを意味している．図 7.2(b) を参照されたい．

また別な方法として，平面を特殊共形変換 (4.11) することで，球面に変換できるが，この AdS/CFT 対応に相当する座標変換を用いることで直接 (7.27) を導くこともできる．具体的にこの変換は，AdS 時空のポワンカレ座標 (z, x^μ) に対する

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{x^\mu - b^\mu(x^2+z^2)}{1 - 2b\cdot x + b^2(x^2+z^2)}, \\ z' &= \frac{z}{1 - 2b\cdot x + b^2(x^2+z^2)}, \end{aligned} \tag{7.28}$$

という座標変換で与えられる[66]．この座標変換は対称変換であり，AdS 時空の計量を変えないことに注意．パラメーター b^μ は，特殊共形変換 (4.11) のパラメーターに丁度対応し，実際に $z = 0$（AdS 時空の境界）に制限すると両者は一致する．この AdS 時空の座標変換によって，平面 $x_1 = 0$ が，半球面に移されることはすぐ示すことができる．

この半球面 γ_A の面積は，

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{d-1}) \cdot R^d \cdot \int_{\epsilon/l}^1 dy \frac{(1-y^2)^{(d-2)/2}}{y^d} \\ &= \frac{2\pi^{d/2} R^d}{\Gamma(d/2)} \cdot \left[\frac{1}{d-1}\left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-1} - \frac{d-2}{2(d-3)}\left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-3} + \cdots \right], \end{aligned} \tag{7.29}$$

で与えられる．

この表式 (7.29) において，右辺の省略された部分 $\cdots$ は，オーダー $\mathcal{O}(\epsilon^{-d+5})$ の項であるが，d が奇数の時は，log 的な振る舞いをする項 $\sim \log \frac{l}{\epsilon}$ も含む．

ホログラフィックな公式 (7.1) を用いて，S_A を求めると以下のようにまとめられる：

$$
\begin{aligned}
S_A &= \frac{2\pi^{d/2}R^d}{4G_N\Gamma(d/2)}\int_{\epsilon/l}^{1} dy \frac{(1-y^2)^{(d-2)/2}}{y^d} \\
&= p_1\,(l/\epsilon)^{d-1} + p_3\,(l/\epsilon)^{d-3} + \cdots \\
&\quad \cdots + \begin{cases} p_{d-1}\,(l/\epsilon) + p_d, & d\text{: 偶数}, \\ p_{d-2}\,(l/\epsilon)^2 + q\log(l/\epsilon) + \mathcal{O}(1), & d\text{: 奇数}, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

ここで，係数 p_i, q は以下で与えられる：

$$
\begin{aligned}
p_1/P &= (d-1)^{-1}, \quad p_3/P = -(d-2)/[2(d-3)], \quad \cdots \\
p_d/P &= (2\sqrt{\pi})^{-1}\Gamma(d/2)\Gamma\left((1-d)/2\right) \quad (\text{if} \quad d = \text{偶数}), \\
q/P &= (-)^{(d-1)/2}(d-2)!!/(d-1)!! \quad (\text{if} \quad d = \text{奇数}), \\
P &\equiv \frac{\pi^{d/2}R^d}{2G_N\Gamma(d/2)}.
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

このようにホログラフィックに求めた結果は，第 4 章で共形場理論のエンタングルメント・エントロピーの一般的な振る舞いとして紹介した結果 (4.114) を再現している．実際，(4.114) という一般次元のスケーリング則を最初に明らかにしたのは，以上で説明したホログラフィックな解析であったのである [16]．

まず (7.30) において，主要発散項 $O(\epsilon^{-(d-1)})$ は面積則 (3.21) を表している．それに加えて，より弱く発散する項が ϵ^2/l^2 に関する冪展開として現れる．このような項は，カットオフ ϵ に依存し，その選び方に依存するので物理的な意味を正確に把握するのは難しい．一方で，ϵ に依存しない定数を (4.114) や (7.30) から探し出すことができる．そのような項は，はっきりとした物理的な意味を持つ普遍的な項と言える．共形場理論の次元 $d+1$ が奇数の場合は，$p_d(=F)$ は，カットオフに依存しない有限の定数である．一方，$d+1$ が偶数の場合は，係数が $q(=C)$ で与えられる $\log(l/\epsilon)$ に比例する項がある．その係数 q は，カットオフを変えても不変である．実際に，すでに第 4 章で説明したように q は中心電荷（セントラルチャージ）の線形結合に比例している．F と C は共形場理論の自由度に比例していると考えられるが，(7.30) から明らかなように，それらは R^d/G_N に比例している．実際に，中心電荷も R^d/G_N に比例していることが知られており，AdS_3/CFT_2 における関係式 (7.8) を一般次元に拡張することに相当する．

7.3.3 具体例：4 次元ゲージ理論

これまでは AdS 時空における古典重力理論を考えたが，具体的な共形場理論との比較を行うには，超弦理論のセットアップに埋め込む必要がある．そのために，すでに第 6 章で述べたタイプ IIB 超弦理論における $AdS_5 \times \mathbf{S}^5$ で与えられるセットアップを取り上げることにする．既に述べたように，この背景における量子重力理論（超弦理論）は，AdS/CFT 対応を通じて，4 次元の $\mathcal{N}=4$ $SU(N)$ 超対称性ゲージ理論と等価となる．

そこで，(6.11) の関係式を用いて (7.23) と (7.30) を $d=3$ の場合に書き直すと，それぞれ

$$S_A^{\text{帯}} = \frac{N^2L^2}{2\pi\epsilon^2} - 2\sqrt{\pi}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\right)^3 \frac{N^2L^2}{l^2}, \tag{7.32}$$

$$S_A^{\text{球}} = N^2\left[\frac{l^2}{\epsilon^2} - \log\left(\frac{l}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(1)\right], \tag{7.33}$$

となる．まず，S_A はともに N^2 に比例しており，これはゲージ理論の場の数が N^2 に比例することから当然の結果と言える．

帯状の場合 $S_A^{\text{帯}}$ を見てみよう．(7.32) の有限の第 2 項を数値的に見積もると

$$S_A^{\text{帯}}|_{\text{有限}} \simeq -0.0510\cdot\frac{N^2L^2}{l^2}, \tag{7.34}$$

となる．この古典重力極限の結果を場の理論で再現するには，$\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論の強結合極限で，エンタングルメント・エントロピーを計算する必要がある．しかしながら，現在の知識でこの計算を行うのは大変困難である．

そこでゲージ結合定数がゼロ $g_{YM}=0$ の極限で，$\mathcal{N}=4$ 超対称性ゲージ理論のエンタングルメント・エントロピーを計算することを考えてみる．関数形は，この自由場の計算 (4.116) でも同じ形が得られることはすでに説明した．この最も簡単な極限でも部分系 A が帯状である場合は，解析的な計算を行うことができない．そこで近似的に見積もると，

$$S_A^{\text{自由場：帯}}|_{\text{有限}} \simeq -(8\times0.005+4\times0.01)\cdot\frac{N^2L^2}{l^2} = -0.08\cdot\frac{N^2L^2}{l^2}. \tag{7.35}$$

程度であることが分かり，オーダーはほぼ (7.34) と一致する．この計算で右辺の寄与は，それぞれ 8 個のボソン（6 個のスカラー場とゲージ場の 2 つの偏光モード），そして 8 個のフェルミオンの寄与をそれぞれ表している．

以上のように一般にエンタングルメント・エントロピーは，ゲージ理論の結合定数に依存するので，ホログラフィックな計算結果を場の理論で厳密に再現するのは大変困難である．しかし 2 次元共形場理論でそうであったように，中心電荷のように結合定数に依存しない量に比例する場合は両者を比較するのは容易になる．それに相当するのが，(7.33) の $\log(l/\epsilon)$ に比例する項である．第 4 章の共形場理論に基づく結果 (4.132) を用いると，$\mathcal{N}=4$ $SU(N)$ 超対称性ゲージ理論の中心電荷は，$a_{\mathcal{N}=4}=(N^2-1)/4$ で与えられることが知られているので，ラージ N 極限において

$$C(=q) = -4a_{\mathcal{N}=4} \simeq -N^2, \tag{7.36}$$

と求められるが，これは確かにホログラフィックな結果 (7.33) と一致している．

ここで少し結果を一般化することを考えてみる．超弦理論は 10 次元でのみ定義することができるので，5 次元の AdS 時空を含む場合を考えると $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{X}_5$

という時空を考えることになる．実際に，5 次元多様体 X_5 が，5 次元の正の宇宙項を持ったアインシュタイン方程式を満たせば，全体として $AdS_5 \times X_5$ が超弦理論の解となることが分かる．このような X_5 を**アインシュタイン多様体**と呼ぶ．このとき，AdS_5 の半径は以下で与えられることが分かる [67]：

$$R = l_s \left(\frac{8\pi^5 g_{YM}^2 N}{\mathrm{Vol}(X_5)} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{7.37}$$

ここで，N は AdS_5 時空を構成する D3 ブレインの数（双対のゲージ理論のゲージ群の階数に比例する）を意味し，$\mathrm{Vol}(X_5)$ は，X_5 の体積が $R^5\mathrm{Vol}(X_5)$ となるように定義した．この関係式 (7.37) を用いると，$AdS_5 \times X_5$ に対するエンタングルメント・エントロピー S_A は，$AdS_5 \times \mathbf{S}^5$ の場合の値 $S_A^{\mathcal{N}=4}$ と比較すると

$$S_A = \left(\frac{a}{a_{\mathcal{N}=4}} \right) \cdot S_A^{\mathcal{N}=4}, \tag{7.38}$$

の関係にあることが分かる．つまり中心電荷 a に比例することが確認できた．4 次元共形場理論の中心電荷には a と c があるが，古典重力極限では，$a = c$ となっていることが知られているので，(7.38) のように $a = c$ に比例するという結果は自然であるといえる．特に A が球状で，$\log(l/\epsilon)$ の係数を考えると (7.38) は，(4.132) を再現することが分かる．しかし，このホログラフィックな結果はすべての部分系 A に対して成立することに注意されたい．

なお，一般に部分系 A に対して S_A の計算を実際に行うのは難しいが，第 4 章で見たように $\log(l/\epsilon)$ の係数に関しては，解析的な式 (4.133) を導くことができる．ホログラフィックな計算 (7.1) を用いて，この結果を再現できることが知られている [47]．

7.4　強劣加法性の導出

エンタングルメント・エントロピーの最も重要な性質の一つが**強劣加法性**である [20]．これは (2.27) もしくは (2.28) の不等式で与えられることはすでに説明した．そこで，この不等式をホログラフィックな計算法 (7.1) で再現できるか確かめてみたい．以下で見るように，実は AdS/CFT 対応を用いた強劣加法性の導出はとても容易である [68]．

さて，3 つの部分系 A,B,C を AdS 時空の境界（の時刻一定面上に）にとる．その時に，$S_{A\cup B}$ と $S_{B\cup C}$ の計算に相当する極小曲面を書くと，図 7.3 の一番左にある図のようになる．その 2 つの曲面を組み替えて，同じ総面積をもつ別の 2 つの曲面の和で表し，それぞれ $A \cup B \cup C$ と B を取り囲む曲面とすることができる．この時に，$A \cup B \cup C$ と B に対する極小曲面が別に存在するはずなので，強劣加法性 (2.27) が成り立つことは明らかである．図 7.3 の上図を参

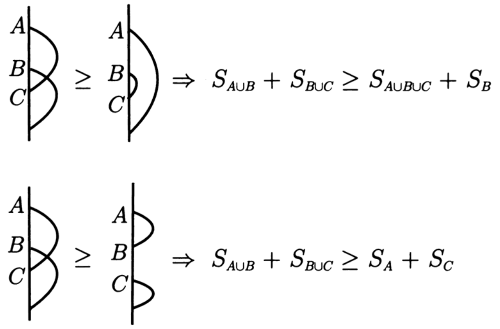


図 7.3　ホログラフィックな強劣加法性の導出.

照されたい．もう一つの強劣加法性の表現 (2.28) は，同様に，曲面を組み替えて，A と B を取り囲む曲面の和とみなすことで，簡単に示される．図 7.3 の下図を参照されたい．

以上の強劣加法性の証明で本質であったのは，まず，AdS/CFT 対応に現れる余分な座標 z の存在である．例えば，もしこの方向が存在しなければ，図 7.3 の上図の不等式は等式になってしまう．このように量子力学の基本的な性質からホログラフィー原理を垣間見ることができることは大変興味深い．もう一つ重要であったことは，曲面の最小面積でエンタングルメント・エントロピーが与えられるということである．実は，面積でなくても γ_A 上の局所積分で与えられる任意の量の最小値であっても，強劣加法性が成り立つことはすぐにわかる．実際，後に見るように，公式 (7.1) に対して高階微分を導入する補正をこの自由度を用いて取り入れることができるのである．しかしゲージ理論の $1/N$ 補正に対応する量子重力効果を考慮する場合は，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは何かの量の最小値で与えられないので強劣加法性の証明は非自明であることに注意しておきたい．

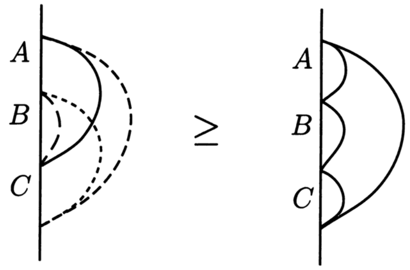
このように AdS/CFT 対応において量子重力効果を無視すると強劣加法性が幾何学的に容易に証明できた．図 7.4 に描いたような同様の議論で以下の不等式を導くこともできる [69]：

$$S_{A\cup B} + S_{B\cup C} + S_{C\cup A} \geq S_A + S_B + S_C + S_{A\cup B\cup C}. \tag{7.39}$$

この不等式を相互情報量を用いて書き直すと

$$I_3(A:B:C) \equiv I(A:B) + I(A:C) - I(A:B\cup C) \leq 0, \tag{7.40}$$

が得られる．$I_3(A:B:C)$ は 3 体相関を測る量で，**三者間情報量 (Tripartite information)** と呼ばれる．この不等式は相互情報量が示量的ないし超示量的な量であることを意味し，量子的相関が古典的相関よりも多いことを示している．しかしながら一般の場の理論を考えた時に，この不等式 (7.40) は必ずしも



$$\boxed{\begin{array}{l} S_{A\cup B} + S_{B\cup C} + S_{A\cup C} \geq S_A + S_B + S_C + S_{A\cup B\cup C} \\ \Leftrightarrow I(A:B) + I(A:C) \leq I(A:B\cup C) \end{array}}$$

図 7.4 不等式 $I_3(A:B:C) \leq 0$ のホログラフィックな導出.

成り立つわけではない．従って，ここで (7.40) が導かれた理由は，量子重力効果を無視する極限，つまりゲージ理論の言葉でいうとラージ N 極限を特に考えているからである．実際に，(7.40) が強劣加法性よりも強い不等式であることは相互情報量が正であることからすぐに分かる．またこの不等式の特別な場合を考えることで，どんな量子多体系でも成立することが証明されているキャドニー・リンデン・ウインター (Cadney–Linden–Winter) の不等式をホログラフィックに導出することもできる．また質量ギャップがある系に AdS/CFT 対応を適用した場合を考えると，$I_3(A:B:C)$ はトポロジカルなエンタングルメント・エントロピー S_{top} と等しいことが示せるので，不等式 (7.40) は $S_{top} \leq 0$ であることを意味する．

7.5 部分系 A が非連結な多様体の場合

今までのホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの具体的な計算では，すべての例で部分系 A が連結な多様体である場合を考えていた．そこで，非連結な場合にどのような結果が得られるか簡単に触れておきたい．部分系 A が 2 つの互いに非連結な多様体 A_1 と A_2 からなる場合 $A = A_1 \cup A_2$ を考え，それぞれの大きさが有限の大きさ l 程度とし，また A_1 と A_2 の重心間の距離を r_{12} とする．

このとき，極小曲面 γ_A として考えられる候補には 2 通りある．一つは，∂A_1 と ∂A_2 をつなぐような多様体で，面積が最小になるものである．もう一つは，∂A_1 と ∂A_2 それぞれを境界とする極小曲面 γ_{A1} と γ_{A2} の和からなる非連結な曲面 $\gamma_{A1} \cup \gamma_{A2}$ で与えられる場合である．

相互情報量 (2.30) を考えるとこの 2 つの曲面は大きく違った結果を与える．前者の連結した曲面は，$I(A_1 : A_2) > 0$ を与えるが，後者の非連結な曲面は，

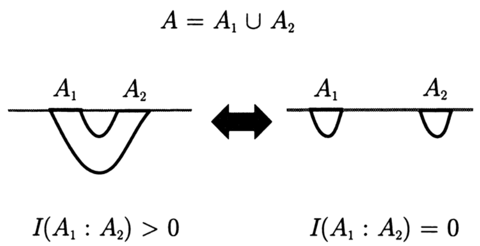


図 7.5　部分系 A が非連結な空間の場合の極小曲面 γ_A．$\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ のセットアップを考えているが，ほぼ自明に高次元化できる．

$I(A_1 : A_2) = 0$ となる．図 7.5 を参照されたい．

この 2 つの曲面のうちどちらが選ばれるかは，どちらの面積が小さいかで決まる．詳細は部分系 A の形や，考えている重力理論の時空の計量に依存する．しかし定性的な振る舞いはどんな例でも共通であり，$l \gg r_{12}$ の場合には連結した曲面が選ばれ，$l \ll r_{12}$ の場合は非連結な曲面が選ばれる[41]．つまり，A_1 と A_2 が十分離れると必ず相互情報量がゼロになる．

さて，A_1 と A_2 の距離が離れてはいるが有限の距離であるので，相関を測る量である相互情報量がゼロになることを奇妙に思うかもしれない．しかしながら，これは今考えている古典重力理論の極限がゲージ理論のラージ N 極限に対応するからなのである．ゲージ理論の場合，$O(N^2)$ の主要項は今述べたように自明になるが，$O(1)$ の項を調べると，非自明な結果が得られるのである．ゲージ理論において相互情報量の計算を行うと閉じ込めのような現象が起こり，そのせいでゲージ場の電荷を帯びていない状態のみエントロピーに寄与することになり，$O(N^2)$ の寄与は存在しない．

2 次元共形場理論の場合は，中心電荷が大きくなる極限で，主要項の相互情報量が十分距離が離れた場合にゼロになることも確認されている[37]．以上のように，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーでは，部分系 A の形を表すパラメーターを少しずつ変えていくときに，ある値を境に急に変化する（微分係数に飛びが生じる）という相転移のような現象が一般に起こる．これはラージ N 極限を取っていて，その主要項のみを計算しているからだと考えられ，$1/N$ 補正を取り入れるとスムーズな関数になると期待される．次章で触れるが，$1/N$ 補正を AdS/CFT 対応の重力理論側の量子効果として取り入れることで，そのような寄与を計算することができる[70],[71]．

7.6　ブラックホールのエントロピーとしての計算法

それでは，ホログラフィックなエンタングルメントエントロピーの公式 (7.1) の導出に進みたい．一般的な導出は次の節で述べるとして，その前に特別な場

合にはブラックホールのエントロピーに帰着させることで (7.1) を導けることを説明したい．

AdS$_{d+2}$ 時空のポワンカレ計量を以下の形に表そう：

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dudv + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2}{z^2}. \tag{7.41}$$

この時に，座標変換を

$$\begin{aligned} u &= -\zeta e^{-t/R}\sqrt{1 - R^2/r^2} \ (< 0), \\ v &= \zeta e^{t/R}\sqrt{1 - R^2/r^2} \ (> 0), \\ z &= \tfrac{R\zeta}{r}, \end{aligned} \tag{7.42}$$

のように定義しよう．そうすると新しい座標の計量は，

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{R^2} - 1} + r^2\left(\frac{d\zeta^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2}{\zeta^2}\right), \tag{7.43}$$

となる．この計量の形から明らかなように $r = R$ において地平線を持つブラックホール解となっている．地平線は，(ζ, x_i) で張られる空間であり，その計量から d 次元双曲面 $\mathbf{H}_d$ であることが分かる．このようにもともとブラックホールではなかったポワンカレ AdS 時空の一部を座標変換すると，ブラックホールに変わる．このようなブラックホールは**トポロジカルブラックホール**と呼ばれる [72]．

注意したいことは，この座標変換において，ポワンカレ AdS 時空の中の $u < 0$ かつ $v > 0$ の領域に制限していることである．(7.42) の座標変換で $r = \infty$ とすると分かるように，AdS 時空の境界に制限すると，丁度ミンコフスキー時空を 4 等分して，リンドラー時空を取り出すことに相当している．5.3 節の図 5.2 を思い出して，時間が $T = \frac{u+v}{2}$ で与えられるミンコフスキー空間において静止した観測者から，時間が t で与えられるように加速された観測者（リンドラー観測者）の視点に移る操作を共形場理論で行ったとしよう．この操作を AdS/CFT 対応を用いて AdS 時空の座標変換として表すと，(7.42) で与えられるということなのである．

$\mathbf{R}^{d+1}$ 上で定義される共形場理論のエンタングルメント・エントロピー S_A を部分系 A が $u - v < 0$, $u + v = 0$ で定義されるように選ぶ．つまり A は，時間一定面の丁度半分の空間である．この場合には 5.3 節の (5.12) の式で説明したように，エンタングルメント・エントロピーは時間 t 方向のハミルトニアンに関する有限温度状態の熱力学的エントロピーで与えられる．つまり，トポロジカルブラックホール (7.43) のエントロピーを計算すればよい．

さて，座標変換 (7.42) において，ポワンカレ AdS 時空のリンドラー地平線 $u = v = 0$ は，トポロジカルブラックホール (7.43) の地平線 $r = R$ に移る．つまり，トポロジカルブラックホールの地平線の面積は，リンドラー地平線の面

積に等しい．このリンドラー地平線は明らかに極小曲面であるので，(7.1) における γ_A と一致する．このようにして,「部分系 $A=$ 半平面」の場合には，公式 (7.1) を確かめることができた．

実際に，具体的にトポロジカルブラックホールのエントロピーを計算すると

$$S=\frac{R^d}{4G_N}V_{d-1}\int_\epsilon^\infty\frac{d\zeta}{\zeta^d}=\frac{R^dV_{d-1}}{4G_N}\frac{1}{(d-1)\epsilon^{d-1}}, \tag{7.44}$$

と計算され，ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーと明らかに一致する．座標変換 (7.42) において，$r=R$ では $z=\zeta$ となることから，ζ の座標における紫外カットオフは，もとの z のカットオフ ϵ と同じになることに注意．

次に,「部分系 $A=$ 球面内」の場合を考えたい．共形変換で，平面は球面に写像されるので，先述の場合に帰着できる．従って，トポロジカルブラックホールへの座標変換を見出すことができるはずである [48]．(6.5) によって大域的な AdS 時空とポワンカレ AdS 時空の関係式が与えられているが，さらに以下のように大域的な AdS 時空を座標変換して与えられる時空を考えよう：

$$\begin{aligned}
&X_0=\rho\cosh u,\\
&X_i=\rho\sinh u\Omega_i \quad (i=1,2,\cdots,d),\\
&X_{d+1}=-\sqrt{\rho^2-R^2}\cosh\tfrac{t}{R},\\
&X_{d+2}=\sqrt{\rho^2-R^2}\sinh\tfrac{t}{R}.
\end{aligned} \tag{7.45}$$

ここで Ω_i は，$d-1$ 次元単位球面上の座標であり $\sum_{i=1}^d(\Omega_i)^2=1$ を満たす．

この時空の計量は，以下で与えられる．

$$ds^2=-\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)dt^2+\frac{d\rho^2}{\frac{\rho^2}{R^2}-1}+\rho^2(du^2+\sinh^2 ud\Omega^2). \tag{7.46}$$

従って，やはり $\rho=R$ において地平線が存在し，地平線は d 次元双曲面 $\mathbf{H}_d$ で与えられるトポロジカルブラックホールである．

さて，大域的な AdS 時空を経由させることで，ポワンカレ AdS 時空とトポロジカルブラックホール (7.46) の間の座標変換に注目しよう．後者において，$X_{d+1}\pm X_{d+2}<0$ であることから，前者の時空における制限

$$\sum_{i=1}^d(x_i)^2+z^2-(t\pm R)^2\le 0, \tag{7.47}$$

が導かれる．これは，$t=0$ における球面 $\sum_i x_i^2+z^2=R^2$ の上下に光円錐をかぶせた領域である．

このセットアップは，実は丁度 4.10 節において説明した共形変換 (4.142) の AdS/CFT 対応に基づく重力双対となっている．領域 (7.47) を AdS の境界 $z=0$ に制限すると円錐領域 $\sum_{i=1}^d(x_i)^2-(t\pm R)^2\le 0$ となるが，これは丁度

(4.142) のとる値域が $r^2-(t\pm R)^2\le 0$ であることに一致する．部分系 A を球面内 $r\le R$ にとると，そのエンタングルメント・エントロピーは，共形変換 (4.142) を用いると $\mathbf{S}^1\times\mathbf{H}_d$ における熱力学的エントロピーと等価になる．

前述の座標変換において，トポロジカルブラックホール (7.46) の地平線 $\rho=R$ は，ポワンカレ AdS 時空の d 次元曲面

$$t=0,\ \ \sum_{i=1}^{d}(x_i)^2+z^2=R^2, \tag{7.48}$$

に移る．これは半径 R の半球面であり，(7.27) で述べたように，部分系 A に対する極小曲面 γ_A と一致する．このようにして,「部分系 $A=$ 球面内」の場合にも公式 (7.1) を確かめることができた．また，前述の座標変換では，部分系 A の半径は，AdS 時空の半径 R と同じになってしまったが，X_0 と X_{d+1} をブースト変換で線形変換することで，AdS の半径とは独立に部分系 A の半径を好きに変えることもできる．

以上の例では,「部分系 $A=$ 半平面」と「部分系 $A=$ 球面内」の場合にエンタングルメント・エントロピーのホログラフィックな計算を考察し，公式 (7.1) を導いた．これは，(7.43) や (7.46) における時間 t をユークリッド化して周期 $2\pi R$ で同一視した空間（＝ユークリッド化したトポロジカルブラックホール）におけるエントロピーと等価であることを見た．この議論は共形場理論のみに適用できるので，AdS 時空を変形した場合には適用できないことに注意．

この節で説明したセットアップは，実は**レンニ・エントロピー**の計算にも適用できる．レンニ・エントロピーの定義 (2.19) から明らかなように，$\mathrm{Tr}[(\rho_A)^n]$ を計算できれば求められる．これは (7.43) や (7.46) の計量に対してブラックホールの質量 M を導入することに対応する変形

$$g_{tt}=1/g_{rr}=1/g_{\rho\rho}=\left(\frac{r^2}{R^2}f(r)-1\right),\quad f(r)\equiv 1-M/r^{d+1}, \tag{7.49}$$

を行い，ユークリッド時間 $t_E=it$ の周期がもともとの n 倍となるようにすればよい．詳細は文献 [73] を参照されたい．このように，共形場理論に対して部分系 A が上述のように特殊な場合は，レンニ・エントロピーをホログラフィックに計算することができるのである．しかしながら，共形場理論以外の場合に関しては計算は大変複雑で，現在のところレンニ・エントロピーのホログラフィックな公式は一般に知られていない．

7.7 ホログラフィックな公式の導出

さてそれでは，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー公式の一般的な導出を説明して，本章を完結したい．この導出法は，フルサエフ [74] が提案した手法をリューコウィッツとマルダセナ [64] が改善することで得られた．

以下ではその導出法について解説したい．

エンタングルメント・エントロピーは 3.1 節で説明したようにレプリカ法で計算できる．図 3.1 で表されるような，もとの $d+1$ 次元ユークリッド空間 Σ の n 重のレプリカをとった空間を Σ_n と表し，その上の分配関数を Z_{Σ_n} と表す．そのときエンタングルメント・エントロピーは，(3.3) に従って以下の公式で計算される：

$$S_A = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\log Z_{\Sigma_n} - n\log Z_{\Sigma}\right)\Big|_{n=1}. \tag{7.50}$$

従って，AdS/CFT 対応で Z_{Σ_n} を計算すればよいことになる．AdS/CFT 対応の基本原理であるバルク／境界関係式 [60] を用いると，

$$Z_{\Sigma_n} = Z_{\text{重力}}(M_n), \tag{7.51}$$

となる．ここで，$Z_{\text{重力}}(M_n)$ は，$d+2$ 次元空間 M_n における分配関数であり，以下では古典重力近似の範囲で計算する．この空間 M_n は，境界が Σ_n となるという条件のもとに重力理論の運動方程式（アインシュタイン方程式など）を解いて得られた解である．Σ_n は損失角に相当する特異点を持つ空間だが，アインシュタイン方程式の解である M_n は当然スムーズな空間でなければならない．一般の Σ_n は大変複雑な計量をもつ空間であり，アインシュタイン方程式を解いて M_n を求めるのは困難である．しかしながら，以下で見るようにエンタングルメント・エントロピーを計算する時に相当する $n \to 1$ の極限をとることで，この難しい問題を回避できるのである．

7.7.1　n が自然数の場合

レプリカ法において，もともとレプリカの数 n は自然数である．このとき Σ_n は，もとの空間 Σ の部分系 A の境界 ∂A を一周するごとに次のレプリカに移り，n 周するともとの空間に戻るという境界条件によって定義されたことを思い出そう．$d=1$ の場合の図 3.1 を高次元に単純に拡張することができ，この事実を容易に理解できるであろう．

そこで，この n 周する角度座標を τ と呼ぶことにする．図 7.6 を参照されたい．Σ_n において τ のとりうる値は，$0 \le \tau \le 2\pi n$ である．このとき重要なことは，Σ_n が，$\tau \to \tau + 2\pi$ とシフトしても同じ空間となるという $\mathbf{Z}_n$ 対称性を持っていることである．言い換えると，n 個のレプリカ空間を 1 ずつずらす対称性を有している．これを**レプリカ対称性**と呼ぶ．以下では，この対称性が自発的には破れないという仮定を置き，この対称性を利用することにする．現在のところ，この対称性が破れる例を筆者は知らないが*1)，仮にそのような例が

*1)　しばしば，スピングラスのようなランダム系ではレプリカ対称性が破れることがよく議論されるが，これはランダム平均をとる際に用いるレプリカ法（$n \to 0$ の極限）に関してであり，エンタングルメント・エントロピーの計算に用いるレプリカ法（$n \to 1$ の極限）とは異なるので両者を混同してはならない．

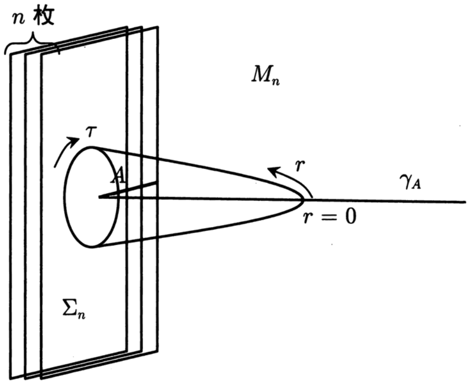


図 7.6 Σ_n 上の共形場理論と双対な M_n 上の重力理論の時空．左側が AdS の境界に相当し，Σ_n となる．簡単のために部分系 A が全空間の半分の場合に図示している．(7.43) の時間座標 t をユークリッド化したものが τ である．この図の $r=0$ は，(7.43) の $r=R$ に相当する．

あったとするとレプリカ法自体の正当性を考え直す必要があると思われるので，本書では考えないことにする．

AdS/CFT 対応を適用すると，Σ_n における共形場理論は，1 次元高い空間 M_n における重力理論とみなせる．Σ_n は τ と d 個のそれ以外の座標で表されるが，表記を簡単化するために後者をあらわに書かないことにする．この場合，M_n は τ に加えて，r という新しい空間座標を導入することで記述できる．r は AdS 時空の余次元方向に伸びている座標である．

r の取り方には自由度があるが，AdS 時空の内部で τ 方向がスムーズにつぶれる場合（その点を $r=0$ と定義する）に着目する．言い換えると，レプリカ対称性 $\mathbf{Z}_n$ の固定点が存在すると仮定する．τ 方向がつぶれない場合は，エンタングルメント・エントロピーに寄与しないからである．この時，計量は $r=0$ 付近で

$$ds^2 \simeq dr^2 + \frac{r^2}{n^2}d\tau^2 + \cdots, \tag{7.52}$$

と振る舞う．省略した $\cdots$ の部分は，他の d 個の座標の成分を持つ計量を意味する．τ の周期が $2\pi n$ であるので，(7.52) は $r=0$ で特異点を持たない．

具体的に M_n に相当する重力の古典解を求める際には，(7.52) の境界条件に加えて，レプリカ対称性

$$\phi(\tau+2\pi) = \phi(\tau), \tag{7.53}$$

を課すことになる．ここで，ϕ は重力理論における計量や物質場を総称したものを表す．この解を用いて，重力理論の作用 $S_{重力}$ を評価することで $Z_{重力}(M_n) = e^{-S_{重力}(M_n)}$ が計算される．

最も簡単な場合は，部分系 A が全空間の半分で与えられる場合で，この時は

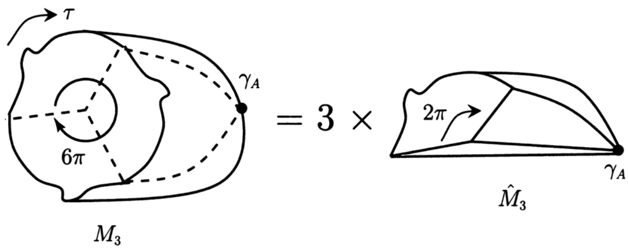


図 7.7 重力双対の空間 M_n を n 等分して $\hat{M}_n$ を定義する．前者（もしくは後者）において座標 τ は，それぞれ 0 から $2\pi n$（もしくは 2π）までの値をとる．上の図では $n=3$ としている．γ_A は $r=0$ の点として定義される．

前節で説明した (7.43) の空間が M_1 であり，これにブラックホールの質量を導入する変形 (7.49) をしたものが M_n に相当する．図 7.6 を参照．

後で役に立つので，$Z_{重力}(M_n)$ が，以下のようにも表されることにも注意しよう：

$$\log Z_{重力}(M_n) = n \cdot \log Z_{重力}(\hat{M}_n). \tag{7.54}$$

ここで，$\hat{M}_n$ は，M_n の τ の定義域を n 等分して，$0 \leq \tau \leq 2\pi$ に制限したものである．従って，形式上 $\hat{M}_n$ は，$r=0$ で円錐的な特異点を有する．しかし，M_n の結果を n 等分することで定義されることから分かるように，特異点からの寄与はゼロと勘定する．図 7.7 を参照されたい．

7.7.2　一般の n への解析接続

さて，公式 (7.50) を用いてエンタングルメント・エントロピーを求めるためには，n について解析接続する必要がある．n が自然数ではない場合に，どのように M_n を定義すればよいだろうか．この場合，$Z_{重力}(M_n)$ を考えるよりも，(7.54) を用いて，$Z_{重力}(\hat{M}_n)$ をもとに定義する方が便利である．n に関する解析接続となるように，$r=0$ 付近の計量の振る舞い (7.52) や，レプリカ対称性から要求される条件 (7.53) は，n が自然数でなくてもそのまま成り立つと仮定する．$\hat{M}_n$ は，これらの条件を満たし，その漸近的 AdS 時空としての境界は Σ に一致するという境界条件のもとでの重力理論の解として定義される．τ の値域が 0 から 2π までなので，(7.53) の条件とも整合する．しかしながら，もしも M_n を直接定義しようとすると，τ の $2\pi n$ の周期と (7.53) の要請が，n が自然数ではないときに矛盾してしまうという問題が生じるのである．

このようにして，n が一般の値の場合は，$\log Z_{重力}(\hat{M}_n)$ をまず計算して，それを (7.50) に従って n 倍することで，$\log Z_{重力}(M_n)$ を定義する．

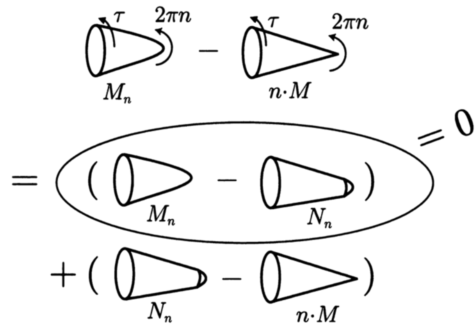


図 7.8　ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの導出の様子.

7.7.3　エンタングルメント・エントロピーの計算

以上のように $\log Z_{\text{重力}}(M_n) = \log Z_{\Sigma_n}$ が計算できたとすると，公式 (7.50) に代入することで S_A が求められる．最後に $n \to 1$ の極限をとる操作が重要で，もしもこのような操作をしない，つまりレンニ・エントロピーなどの計算を考えると，$\log Z_{\text{重力}}(M_n)$ を実際に計算しなくてはならない．しかしながら，エンタングルメント・エントロピーの計算では，$n \to 1$ の極限をとるおかげで，M_n は，もともとの重力解 $M(= M_1)$ からの微小変形とみなせるので，以下で説明するように計算がずっと簡単に実行できるのである．

さて，公式 (7.50) を AdS/CFT 対応を用いて計算するために，$\hat{N}_n$ という中間的な $d+2$ 次元空間を導入することで以下のように 2 つのプロセスに分解する：

$$
\begin{aligned}
&\log Z_{\Sigma_n} - n \log Z_{\Sigma} \\
&= n \log Z_{\text{重力}}(\hat{M}_n) - n \log Z_{\text{重力}}(M) \\
&= -n\left[S_{\text{重力}}(\hat{M}_n) - S_{\text{重力}}(\hat{N}_n)\right] - n\left[S_{\text{重力}}(\hat{N}_n) - S_{\text{重力}}(M)\right].
\end{aligned}
\tag{7.55}
$$

この空間 $\hat{N}_n$ は，$r = 0$ 近傍を除いて M に一致し，$r > \delta$ で $\hat{M}_n$ に一致するスムーズな空間として定義される．但し δ は任意の微小量である．このような空間は重力理論の運動方程式を満たしていないオフシェルの空間であり，無数の候補があるが，その中で 1 つ任意にとってきたものとする．$\hat{N}_n$ は $\hat{M}_n$ と同様に，$r = 0$ で計量が (7.52) のように振る舞い，τ は 0 から 2π の値をとりうるので，円錐的な特異点を有するが特異点からの寄与は考慮しなくてよい．図 7.8 を参照されたい．

エンタングルメント・エントロピーを求めるには，$n \to 1$ の極限において，(7.55) の $O(n-1)$ の項を求めればよい．まず (7.55) の最初の鍵括弧の中 $S_{\text{重力}}(\hat{M}_n) - S_{\text{重力}}(\hat{N}_n)$ は，$n \to 1$ の極限で $O(n-1)$ の寄与はゼロとみなせる．これは，$\hat{M}_n$ は重力理論の運動方程式の解であるので，1 次のオーダー $O(n-1)$ の作用のずれは生じないからである．

次に，(7.55) の 2 つ目の鍵括弧の中を評価したい．$S_{重力}(\hat{N}_n) - S_{重力}(M)$ の差は，$r = 0$ 近傍 $r < \delta$ のみから寄与が生じる．δ はいくらでも小さくとることができるので，重力理論の作用 $S_{重力}$ の項の大半は寄与をしない．無視できないのは，δ 関数の積分に相当するような場合である．今の場合は，そのような寄与を与えるのは以下で説明するようにアインシュタイン・ヒルベルト項のみである．

$nS_{重力}(\hat{N}_n)$ は，$r = 0$ で計量が (7.52) のように振る舞い，τ の値域が 0 から $2\pi n$ をとるので特異点が解消された空間に相当する．一方，$nS_{重力}(M)$ は，M を n 重に張り合わせた空間であり，$r = 0$ において計量は $ds^2 = dr^2 + r^2 d\tau^2 + \cdots$, のように振る舞い，$\tau$ は 0 から $2\pi n$ の値をとるので円錐的な特異点を有するが，特異点からの寄与は考慮しない．

言い換えると，前者は損失角 $2\pi(1-n)$ の円錐のような空間で，その特異点を解消したものであり，後者は，やはり損失角 $2\pi(1-n)$ の円錐のような空間であるが，特異点をそのまま残したものである．両者は $r > \delta$ の領域では完全に一致している．従って，(4.125) の公式を用いると，前者と後者のスカラー曲率の差は，

$$R_{n\hat{N}_n} - R_{nM} = 4\pi(1-n) \cdot \delta^2(r), \tag{7.56}$$

と振る舞う．ここで $\delta^2(r)$ は，(r, τ) 曲面の上の一点 $r = 0$ に制限する δ 関数を意味する．

$d+2$ 次元空間 M において $r = 0$ で定義される d 次元の部分空間を γ_A と書くことにする．そのとき，(7.55) は重力理論の作用 (6.39) を用いて以下のように求められる：

$$\log Z_{\Sigma_n} - n \log Z_\Sigma = -nS_{重力}(\hat{N}_n) + nS_{重力}(M) = \frac{1-n}{4G_N}\int_{\gamma_A}\sqrt{g}.$$

最後に，レプリカ法 (7.50) に従って n で微分することでエンタングルメント・エントロピー S_A を求めると，

$$S_A = \frac{1}{4G_N}\int_{\gamma_A}\sqrt{g}, \tag{7.57}$$

という面積則を得る．さらに重力理論の運動方程式より，$S_{重力}$ の変分がゼロであることが要求されるので，γ_A が極小曲面であることも示される．このようにして，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式 (7.1) を導出することができた[64]．

第 8 章
ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの一般化

本章では，前章で説明したホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーをより一般的な状況に適用できるように拡張する．時間に依存する背景への拡張，高階微分の補正を取り入れた場合，そして量子補正を取り入れる場合について概説する．

8.1 時間に依存する背景におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

前章では,「重力理論の時空が時間に依存しない場合」，もしくは「ユークリッド空間にウィック回転できる時空の場合」に関してホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの計算を説明したが，そうではない時空に対してはどうすればよいのであろうか？　時空が時間に依存しない場合（静的な場合）には，時間一定面をただ 1 つ選ぶことができ，その中で最小面積を考えることができた．しかし，時間に依存する時空に対しては時間一定面の選び方は無数あり，どのように定義してよいかあいまいになる．また，時空全体をユークリッド化すると，計量が一般には実数にならないという問題も生じる．いずれにせよ，(7.1) の公式そのままでは，時間に依存する時空には適用できないのである．では，一般の漸近的 AdS な時空を考えた場合には，どのように S_A を計算することができるのだろうか．答えを言うと，面積を最小にすることを要求するのではなく，**微小変分しても面積が変わらない**というより弱い条件

$$\delta[\gamma_A \text{の面積}] = 0, \tag{8.1}$$

を課して定義される曲面を γ_A と定義すればよい．このような曲面は，**極値曲面 (extremal surface)** と呼ばれる．このように偏微分方程式の解として定義されるので，場合によっては複数の極値曲面が見つかる場合がある．その場合は，面積が最小になる曲面を選ぶことにする．このルールで γ_A を求め，(7.1)

を計算したものを，**共変的でホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式**と呼ぶ[75]．例えば，次章で議論するように回転するブラックホール解やブラックホールが時間発展とともに周りの物質を吸い込みながら成長してゆくような過程を考える場合は，この共変的な公式を用いる必要がある．

特に時間に依存しない時空に制限すると，上で述べた共変的な計算は前章で述べた計算に帰着する．実際，面積が最小になる条件は局所的にみると面積が極値を取る条件 (8.1) を満たす必要があるからである．幾何学的に言うと，$d+2$ 次元の時空に埋め込まれている d 次元曲面 γ_A が極値曲面となる条件は，（余次元 2 に対応する）2 つの外曲率 $K^{(1)}_{\alpha\beta}$, $K^{(2)}_{\alpha\beta}$ のトレースがゼロになること

$$K^{(1)}_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} = K^{(2)}_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} = 0, \tag{8.2}$$

と同じである．ここで $h_{\alpha\beta}$ は，γ_A 上の計量である．

以上で説明した共変的な計算法は現在のところ AdS/CFT 対応を用いて導出はされてはいない．しかしながら，強劣加法性を示せること[76] や，具体的な計算例の検証から正当性は既に十分確かめられていると言える．

8.2 高階微分の補正

これまで紹介したホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式 (7.1) やその共変的な公式は，重力理論として古典重力理論（アインシュタイン重力）を仮定した場合に適用できる．しかし実際の超弦理論を考えると，AdS 時空の半径が十分大きいときに低エネルギー極限をとってはじめてこのような古典重力理論がよい近似になるのである．つまりすでにみたように (6.10) と (6.12) がともに大きい極限を取る必要があるのである．従って，それぞれが無限大ではない場合には，2 種類の補正を取り入れる必要がある．後者の補正は，ラージ N ゲージ理論の $1/N$ 補正に相当し，重力理論側では量子重力効果を取り入れることに相当する．これについては次節で解説するので，ここでは前者，すわなち弦理論特有の補正について説明したい．

超弦理論には弦の長さ l_s に相当するパラメーターが存在し，$l_s \to 0$ の極限で弦の大きさがゼロになり，粒子に近づく極限に相当する．この極限では一般相対論ないし超重力理論を再現する．一般相対論のラグランジアンは，アインシュタイン・ヒルベルト作用から明らかなように，計量の 2 階微分に比例する．弦理論の補正を取り入れると，$l_s \to 0$ で一般相対論に帰着するように，l_s の正冪で展開できる．それに応じて次元を合わせるように，l_s^n の項は，$n+2$ 階微分 $(n>0)$ を伴う．具体的には，曲率の微分や，曲率の冪などで書かれる項が現れる．

さて高階微分を含む重力理論で最も簡単な理論の一つが，**ガウス・ボネ重力理論**であり，これは以下の作用で定義される：

$$S_{GB} = -\frac{1}{16\pi G_N}\int d^{d+2}x\sqrt{g}\left[R-2\Lambda+\lambda_{GB}(R_{abcd}R^{abcd}-4R_{ab}R^{ab}+R^2)\right].$$

パラメーター λ_{GB} が高階微分項の大きさを表しており，$\lambda_{GB} = 0$ の場合は，アインシュタイン・ヒルベルト作用に帰着する．この高階微分項はオイラー密度と呼ばれ，4 次元の場合はその積分がオイラー数を与える．このガウス・ボネ重力理論が優れている点は，高階微分を含む重力理論でありながら，その運動方程式がアインシュタイン方程式のように 2 階微分で書かれる点である．同じ 4 階微分項でも，別の線形結合をとるとこのようなよい性質は得られず，運動方程式には高階微分が生じる．超弦理論には無限個の高階微分項が存在すると考えられているが，このガウス・ボネ重力理論はその最初の補正 $\lambda_{GB} \sim l_s^2$ を記述していると思うことができる．

さて，このガウス・ボネ重力理論に対して，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A = \left[\frac{1}{4G_N}\int_{\gamma_A} d^dx\sqrt{h}(1+2\lambda_{GB}R_{int})\right], \tag{8.3}$$

で与えられることが示されている [47], [77]．ここで，γ_A は，(7.1) と同様のトポロジカルな条件を満たし，かつこの汎関数 (8.3) を最小にするように選ぶ．R_{int} は，γ_A のスカラー曲率を，γ_A 上の計量を用いて計算したもの（intrinsic な曲率）である．

より一般の高階微分項が存在する重力理論ではどのようにホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを計算したらよいであろうか．強劣加法性の要請より，(8.3) のように計量や曲率などの何らかの積分を最小化するものと表されるはずである．特にラブロック (Lovelock) 重力理論と呼ばれるクラスの重力理論に対しては明確な答えが知られている．かなり複雑な話になるのでこれ以上は立ち入らない．文献 [47] などを参照されたい．

8.3 量子重力効果の補正

これまでは重力理論を古典論として取り扱い，プランクスケールの量子重力効果を無視してきた．これは共形場理論のラージ N 極限に相当するが，ラージ N 極限に興味があったとしても，時には主要項がゼロになり $1/N$ の高次項を考えないと非自明な結果が得られない場合がある．そのような例の一つは，7.5 節で説明した非連結な部分系の場合で，特に距離の離れた系の間の相互情報量は，古典重力極限の公式 (7.1) を用いるとゼロになってしまう．一方で，場の理論の解析からは相互情報量は，閉じ込めのような現象のために $1/N$ の正冪の因子がかかるのでとても小さくはなるが，非自明となると予想される．そこ

で，そのような寄与をどのように計算すればよいのかという問題が生じる．

8.3.1 量子補正の一般論

そこで以下では，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの最低次の量子補正（オーダー $O(G_N^0)$）をどのように計算すればよいのか，論文 [71] に従って一般論を説明したい．このオーダーでは，粗っぽく言って，場の理論の古典解の周りの 1 ループ積分をすることに相当する．しかしながら具体的な計算は，特別な例（例えば文献 [70]）を除いて，一般に大変複雑な計算をすることが必要となってしまうことを付け加えておく．

さて，7.7 節で説明した古典重力理論におけるホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの導出を思い出そう．もともと空間 Σ の n 個のレプリカ Σ_n を考えた時に，n 周する方向の座標 τ を導入した．AdS/CFT 対応によって双対となる重力理論は空間 M_n 上で定義される．その時，重力理論の場を量子化したとして，そのヒルベルト空間上の量子論を考え，時間を τ と思った時のハミルトニアンを $H_n(\tau)$ と定義しよう．τ 方向は並進対称性が一般にはないため，これは時間に依存するハミルトニアンとなるが，レプリカ対称性から $H_n(\tau+2\pi)=H_n(\tau)$ という周期性を持っている．

M_n を n 等分して定義される $\hat{M}_n$（図 7.7 参照）に，$\tau=0$ と $\tau=2\pi$ における場の各配位を行列の成分と思うと,（正規化されていない）密度行列

$$\rho_n = P\cdot e^{-\int_0^{2\pi} d\tau H_n(\tau)}, \tag{8.4}$$

を定義できる．これを用いると量子補正に相当する分配関数は

$$Z^q_{\Sigma_n} = \mathrm{Tr}[(\rho_n)^n] \tag{8.5}$$

と計算される．ここで注意したいのは，ρ_n と H_n は，n に依存している事実である．これは M_n の計量が n に依存していることからも明らかである．従って，共形場理論のレプリカ法の計算 (3.3) とは異なり，n の微分は，ρ_n にも作用する．従って，S_A は 2 つの寄与からなる：

$$S_A = -\partial_n\left(\log\mathrm{Tr}[(\rho_1)^n] - n\log\mathrm{Tr}[\rho_1]\right) - \frac{\mathrm{Tr}[\partial_n\rho_n|_{n=1}]}{\mathrm{Tr}\rho_1}. \tag{8.6}$$

最初の項は，重力理論の密度行列 ρ_1 に対するフォンノイマン・エントロピーである．これはある与えられた $d+2$ 次元時空における（バルクの）エンタングルメント・エントロピーに相当し，γ_A 上の局所的な積分では表すことができない．

2 つ目の項は ρ_n の n 依存性からくる項で，(1) 量子補正によって計量がずれ，(7.1) の面積の値がずれることから生じる寄与 $\frac{\delta[\gamma_A\text{の面積}]}{4G_N}$，(2) ワルド・エントロピー的と呼ばれる寄与（例えば $\int_{M_n}\phi^2 R$ のような相互作用がある場合に，

$\int_{M_n}\langle\phi^2\rangle R$ と期待値で置き換えるとエントロピーに寄与する)，(3) 紫外発散の相殺項からの寄与，に分類できる [71]．これらは γ_A 上の局所的な積分として表すことができる．

8.3.2 非連結な部分系への応用

それでは，以上で説明したような量子効果が重要になる例として，共形場理論の相互情報量を考察しよう．部分系 A と B が離れていて重複がないとする．その場合に (2.30) で定義される相互情報量 $I(A:B)$ は，有限で非負の値をとる．

まず場の理論での計算を説明すると，A と B の距離 r がそれぞれのサイズに比べてとても大きい極限で，

$$I(A:B)\sim r^{-4\Delta_{min}}, \tag{8.7}$$

と振る舞うことが知られている．Δ_{min} は，理論に含まれる演算子の共形次元のなかで最小のものを表す．この結果は，最初に自由場の数値計算 [78] で求められたが，その後共形場理論を用いた議論 [79] で説明された．その説明の概略は以下のとおりである．

まず，レプリカ法で，部分系 A や B によるツイストされた境界条件を作りだす演算子を抽象的に $\sigma_{A,B}$ と書くと，相互情報量は，

$$I(A:B)=\lim_{n\to 1}\left(-\frac{\partial}{\partial n}\langle\sigma_A\rangle-\frac{\partial}{\partial n}\langle\sigma_B\rangle+\frac{\partial}{\partial n}\langle\sigma_A\sigma_B\rangle\right), \tag{8.8}$$

と計算される．今興味がある項は，右辺の最後の項である．任意の演算子を O と書くと，$\langle\sigma_A OO\rangle$ や $\langle\sigma_B OO\rangle$ の 3 点関数は一般に非自明となる．従って，演算子 O は相互情報量に，距離 r 離れた O の 2 点関数 $\langle OO\rangle$ の 2 乗に比例した寄与を与える．r が十分大きい時に最も重要になるのは共形次元が一番小さい演算子である．このように (8.7) の振る舞いを説明できる．

$n>1$ では，$\langle\sigma_A O\rangle$ も非自明となるが，$n=1$ で 1 点関数は自明になるはずなので $n\to 1$ の極限では $\langle\sigma_A O\rangle\sim O(n-1)$ のように振る舞う．従って，$\langle\sigma_A\sigma_B\rangle$ にはその 2 乗 $O((n-1)^2)$ で寄与するので，相互情報量には寄与を与えないのである．

さて，以上の解析を AdS/CFT 対応を用いて重力理論で記述しようとするとどうなるであろうか？　まず，既に 7.5 節で説明したように，古典重力理論の範疇では (7.1) の公式からの帰結として r が十分大きければ厳密に $I(A:B)=0$ となる．従って (8.7) は再現できない．実際に，先ほどの場の理論の解析を思い出すと σ_A や σ_B は，同時に 2 つの演算子と結合する．演算子は AdS/CFT 対応において重力理論の場（例えばスカラー場）に相当し，それが 2 つ伝播するということは，まとめて考えると 1 ループのファインマン図形になるので量子効果ということになる．実際に，場のプロパゲーターを計算すると，2 点関数

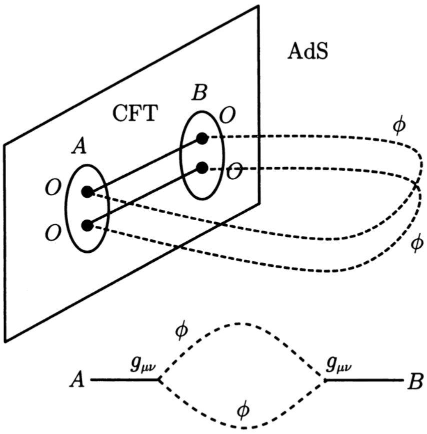


図 8.1　相互情報量の計算．上図は，共形場理論における相互情報量の計算をAdS/CFT 対応を用いて重力理論の立場でどのように記述するのか説明している．下図は，この計算を重力理論におけるファインマン図形で表したもの．

が正しく再現されることを 6.5 節で確かめた．今の場合はその 2 乗に相当する．このようにして，(8.7) の結果は，AdS/CFT 対応を用いるとホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーへの量子補正として説明できるのである．図 8.1 を参照されたい．

第 9 章
有限温度系・熱化現象へのホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの応用

本章では，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの応用として，有限温度の系や物質を大きく励起したときに起こる熱化現象の解析を紹介する．これらの系では基本的にブラックホールの存在が重要な役割を果たし，エンタングルメント・エントロピーの計算がブラックホール時空でどのように行われるのか説明したい．また，励起状態に対するエンタングルメント・エントロピーがどのように振る舞うのか解説したい．

9.1　有限温度系とブラックホール

まず，有限温度系におけるエンタングルメント・エントロピーについてAdS/CFT 対応を用いた解析について説明する．簡単のため，すべて解析的に計算が実行できる $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ の場合を解説する．より高次元の場合に拡張することは本質的に同様であり，物理的な解釈も類似しているので省略する．

有限温度で空間方向が無限に伸びている $1+1$ 次元共形場理論は，6.6 節で説明したように AdS ブラックホール解に対応する．特に 3 次元の AdS ブラックホールは，**BTZ ブラックホール**と呼ばれる [80]．その計量は，(6.35) において $d=1$ と置けば得られる．

次のように 2 回ウィック回転をする座標変換：

$$z=\frac{z_H}{\cosh\rho},\quad t=iz_H\theta,\quad x_1=iz_H\tau \tag{9.1}$$

によって，(6.35) の計量は，大域的な AdS_3 の計量 (7.9) に帰着する．このようにブラックホール解が，AdS 時空の計量に座標変換で一致する理由は，3 次元の負の宇宙定数を持つ（計量の他に物質場を含まない）重力理論のアインシュタイン方程式の解はかならず局所的に AdS_3 の計量で与えられるという有名な事実があるからである．

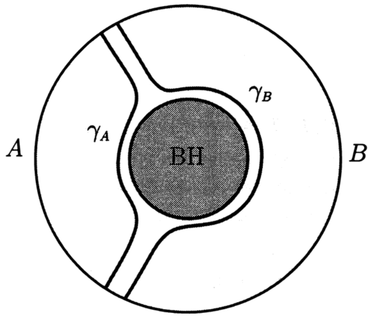


図 9.1 BTZ ブラックホール解におけるエンタングルメント・エントロピーの計算.

さてこの事実を用いると，大域的 AdS_3 で行った計算 (7.13) や (7.14) を用いることができる．部分系 A の長さを l とし，温度 $T = 1/\beta$ の BTZ ブラックホールにおいて ∂A の両端点を結ぶ測地線の長さ λ_* は，

$$\cosh\left(\frac{\lambda_*}{R}\right) = 1 + 2\cosh^2\rho_\infty \sinh^2\left(\frac{\pi l}{\beta}\right), \tag{9.2}$$

で与えられることが分かる．ここで，紫外カットオフ ρ_∞ は今の場合は，$e^{\rho_\infty} = \beta/\epsilon$ の関係で共形場理論のカットオフ ϵ に関係することが分かる．このようにして，ホログラフィックな公式 (7.1) を用いることで共形場理論の結果 (4.81) を確かに再現することができた.

次に，空間方向がコンパクト化されている場合を考えてみよう．この時，円周上に部分系 A とその補集合である B を考える．それぞれに対する測地線 γ_A と γ_B は図 9.1 にあるとおりになる．ブラックホールの地平線が存在するので，γ_A を定義するときのホモロジー条件より，この 2 つの測地線を取り換えることはできない．従って，一般に

$$S_A \neq S_B, \tag{9.3}$$

であることが分かる．これは前に説明したように，混合状態において (2.25) の等式が一般に破れることに適合する．ブラックホールはトポロジカルな障害を与えるという幾何学的事実と混合状態に対する量子情報理論の結果がうまく一致するわけである.

では，A のサイズをどんどん小さくするとどうなるであろうか？　γ_A は単に小さくなるだけであるが，γ_B はある程度 A が小さくなったところで，途中でちぎれたほうが面積が小さくなるので，$\gamma_B = \gamma_A \cup \gamma_{BH}$ となることが分かる．ここで γ_{BH} はブラックホールの地平線を意味する．この場合，S_B と S_A の差はブラックホールのエントロピーと等しく：

$$S_B - S_A = S_{BH}, \tag{9.4}$$

となるのは明らかで，(4.102) をホログラフィックに再現したことになる．

9.2 回転するBTZブラックホールの場合

前節の例ではBTZブラックホールが静的であるので，時間一定面上の極小曲面を計算すればよかった．しかしながら，回転するブラックホールの場合は定常的ではあるが静的ではないので，8.1 節で説明した共変的なホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー公式を用いる必要が生じる．回転するBTZブラックホールの解は次のような漸近的に AdS_3 に近づく解で与えられる（簡単のため AdS の半径を $R=1$ とした）：

$$ds^2 = -\frac{(r^2-r_+^2)(r^2-r_-^2)}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{(r^2-r_+^2)(r^2-r_-^2)}dr^2 + r^2\left(dx + \frac{r_+ r_-}{r^2}dt\right)^2. \tag{9.5}$$

座標 x は，$x \sim x+L$ のようにコンパクト化されているとし，$r_+ > r_-$ と仮定する．このブラックホールの質量 M と角運動量 J は，

$$8\,G_N M = r_+^2 + r_-^2\,, \qquad J = \frac{r_+ r_-}{4\,G_N}\,. \tag{9.6}$$

で与えられる．特に $r_- = 0$ とおくと角運動量はゼロになり，回転していないBTZブラックホール解 (6.35) に帰着する．

この回転した 3 次元ブラックホール解は，2 次元共形場理論を有限温度 $T = 1/\beta$，かつ運動量のポテンシャル Ω の状況下においたものに対応する．ブラックホール解が熱力学的に安定になる高温相 $\beta \ll L$ を仮定する．この温度とポテンシャルは，以下のように与えられる：

$$\beta_\pm \equiv \beta\,(1\pm\Omega) = \frac{2\,\pi\,l}{\Delta_\pm}\,, \qquad \Delta_\pm \equiv r_+ \pm r_-\,. \tag{9.7}$$

従って，対応する 2 次元共形場理論は，以下の密度行列で記述される：

$$\rho = e^{-\beta\,H + \beta\,\Omega\,P}\,, \tag{9.8}$$

ここで H と P はハミルトニアンと運動量を表す．また $\beta_\pm = \beta\,(1\pm\Omega)$ は，左向きと右向きのそれぞれのモードの温度の逆数と思うこともできることに注意．

さて，A を線分と仮定し，共変的な計算法を用いると γ_A は ∂A の 2 点をつなぐ測地線で与えられることが分かる．この測地線は一般には時間一定面の上に載っていない点が前節の回転していない場合との相違点である．この測地線の形を決定するために，全ての BTZ ブラックホールは局所的に AdS 時空と等価であるという事実を用いると便利である．実際，以下のように新しい座標 $(z, w_\pm)$

$$w_\pm = \sqrt{\frac{r^2 - r_+^2}{r^2 - r_-^2}} e^{(x \pm t)\Delta_\pm} \equiv X \pm T,$$
$$z = \sqrt{\frac{r_+^2 - r_-^2}{r^2 - r_-^2}} e^{xr_+ + tr_-} \ . \tag{9.9}$$

を定義すると, ポワンカレ計量

$$ds^2 = \frac{dw_+ dw_- + dz^2}{z^2} \ . \tag{9.10}$$

となることが分かる.

ポアンカレ座標の AdS 時空において, 空間的な測地線は, 時間 $T = w_+ - w_-$ の一定面における半円 $\left(\frac{w_+ + w_-}{2} - X_*\right)^2 + z^2 = l^2$ と, それを $w_\pm \to \gamma^{\pm 1} w_\pm$ のようにブーストしたもので与えられることを既に知っている. それらを先ほどの座標変換を逆に行って, BTZ ブラックホールに戻せば欲しい測地線が見つかるというわけである.

従って, すべての測地線は,

$$\gamma w_+ - \gamma^{-1} w_- = \text{一定} \tag{9.11}$$

という平面にのっているはずである. BTZ ブラックホールにおいて ∂A の両端で同じ時刻 $t = t_0$ になることを要求すると (両端での x の値を $x_{1,2}$ とする)

$$\gamma^2 e^{(x_1 + t_0)\Delta_+} - e^{(x_1 - t_0)\Delta_-} = \gamma^2 e^{(x_2 + t_0)\Delta_+} - e^{(x_2 - t_0)\Delta_-}, \tag{9.12}$$

を得る.

ポワンカレ AdS 時空の紫外カットオフ $z = z_{UV}$ と, BTZ ブラックホールのカットオフ $r = r_\infty$ の関係は, 以下で与えられる:

$$z_{UV} = \frac{\sqrt{r_+^2 - r_-^2}}{r_\infty} e^{r_+ x + r_- t_0} \ . \tag{9.13}$$

ここで注意が必要なことは, ポワンカレ座標においては ∂A の両端点で異なるカットオフ $z_{UV}^{(1)}$ と $z_{UV}^{(2)}$ を仮定し, BTZ ブラックホールでは両端点が同じカットオフ r_∞ を持つように調節する必要があることである. このとき, $\epsilon = 1/r_\infty$ が今考えたい共形場理論の紫外カットオフと解釈される.

またポワンカレ座標における部分系 A の長さ l は BTZ ブラックホールにおける A の両端点の座標を用いて

$$l^2 = \Delta w_+ \Delta w_- = \left(e^{\Delta_+(x_1 + t_0)} - e^{\Delta_+(x_2 + t_0)}\right)\left(e^{\Delta_-(x_1 - t_0)} - e^{\Delta_-(x_2 - t_0)}\right),$$

のように表される.

さて, ポアンカレ AdS におけるエンタングルメント・エントロピーの表式は (7.7) のように既知なので, これを (9.9) のように座標変換することで, 最終的に S_A は,

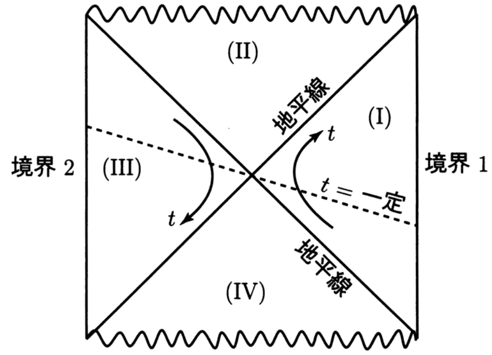


図 9.2 AdS シュワルツシルド・ブラックホール解のペンローズ図．ブラックホールの地平線を超えて時空を拡大することで，領域 I, II, III, IV の 4 つの領域が存在する．領域 I と III で時間の流れ方が逆なので，時刻 t 一定面は，図示したように傾くことに注意．

$$
\begin{aligned}
S_A &= \frac{c}{6}\log\frac{l^2}{z^{(1)}_{UV}z^{(2)}_{UV}} \\
&= \frac{c}{6}\log\left[\frac{\beta_+\beta_-}{\pi^2\epsilon^2}\sinh\left(\frac{\pi\Delta x}{\beta_+}\right)\sinh\left(\frac{\pi\,\Delta x}{\beta_-}\right)\right], \qquad (9.14)
\end{aligned}
$$

のように求められる [75]．ここで，$\Delta x = x_2 - x_1$ と置いた．このように得られた (9.14) は，共形場理論からの計算と一致することが分かり，共変的な計算公式が正しい結果を再現することが確認できるのである [75]．共形場理論の解析で (9.14) を導出するには，(4.4) で説明した共形変換を用いた計算法を少し変形すればよく，簡単な練習問題であるので興味のある読者は計算に挑戦して頂きたい．

9.3 AdS ブラックホールと量子エンタングルメント

AdS/CFT 対応において，以前に説明したように，AdS ブラックホール解は有限温度の共形場理論に対応すると解釈できる．これはユークリッド化した計量の立場で考えると，ユークリッド時間が周期 $\beta = 1/T$ を持つことから明らかである．しかしながら，実時間の計量で考えると周期性は明白ではなく，別の解釈も可能になる [81]．以下では，AdS シュワルツシルド・ブラックホール解 (6.35) を例に説明したい．

地平線 $z = z_H$ で計量は発散するが，図 5.2 で説明したように，地平線の外側 $z > z_H$ は，地平線近傍を平坦な時空で近似すると，その 4 分の 1（リンドラー・ウエッジと呼ばれる）しか覆わない．従って，残りの 4 分の 3 の時空を付け加えて拡大することができる．こうして，拡大された時空の構造は，図 9.2 にあるようなペンローズ図で表される．ペンローズ図の詳細の説明は省くが，

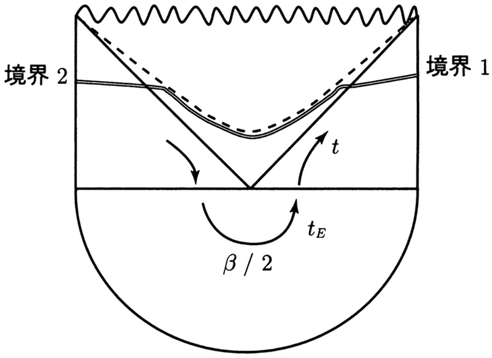


図 9.3　実時間 AdS シュワルツシルド・ブラックホール解をユークリッド解からの解析接続として構成した場合のペンローズ図．下半分が，ユークリッド計量のブラックホール解．二重線は，両境界をつなぐ空間的な測地線．

これは時空のうち 2 次元部分（今の場合は，z と t）を取り出して，さらに共形変換を施すことで，2 次元時空の有限の部分空間として表したものである．

このペンローズ図からすぐに分かることは，もともとの時空 (6.35) の $z \to 0$ の極限に相当する境界部分（境界 1）に加えて，地平線内に時空を拡張することで，もうひとつの境界（境界 2）も存在することである．このことから，ホログラフィー原理に従うと，ブラックホール時空は，それぞれの境界に存在する共形場理論と対応すると思われる．結論を言うと，温度 $T = 1/\beta$ の AdS シュワルツシルド・ブラックホール解は，2 つの共形場理論の積で与えられるヒルベルト空間における，次で与えられる純粋状態に相当する（Thermo field double と呼ばれる）：

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2, \tag{9.15}$$

$$\left(Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n}\right). \tag{9.16}$$

ここで，n と E_n は，各エネルギー準位のラベルとそのエネルギーを表す．実際，どちらかの共形場理論をトレース・アウトすると

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \mathrm{Tr}_2 |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle_1 \langle n|, \\ \rho_2 &= \mathrm{Tr}_1 |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle_2 \langle n|, \end{aligned} \tag{9.17}$$

のようにカノニカル分布に相当する混合状態の密度行列が得られる．これは，境界が 1 つしかないユークリッド計量における有限温度の共形場理論としての解釈と一致する．このように，両者の解釈は等価である．

どのようにして (9.15) を得るかを理解するために，ユークリッドのブラックホール解からスタートして，実時間のブラックホール解へ解析接続して解を構成することを考えよう．図示したのが図 9.3 である．ユークリッド解を，

$-\beta/4 \le t_E \le \beta/4$ に制限して，$t_E = \pm\frac{\beta}{4}$ のそれぞれを，領域 I, III の $t=0$ に張り合わせている．このようにすると，ユークリッド解の部分は，

$$\sum_n e^{-\beta E_n/4}|n\rangle_1 \otimes e^{-\beta E_n/4}|n\rangle_2, \tag{9.18}$$

のように書け，確かに (9.15) に一致する．

さて，以上の議論より，ρ_1 ないし ρ_2 のエントロピー $S_1 = -\mathrm{Tr}\rho_1 \log \rho_1 = S_2$ は，カノニカル分布における熱力学的エントロピーと一致する．このエントロピーは，AdS/CFT 対応を通して，ブラックホールのエントロピーと等しくなる．このようにして，ブラックホールのエントロピーを，2 つの同じ共形場理論の間のエンタングルメント・エントロピーとしても解釈することができるのである．

最後に，時間発展についてコメントしておく．座標 t に関しての時間発展は，図 9.2 に示しているように，2 つの共形場理論では，それぞれ逆方向である．従って，純粋状態 $|\Phi\rangle$ の時間発展は，それぞれの共形場理論のハミルトニアンを H_1 と H_2 とすると，

$$|\Phi(t)\rangle = e^{-i(H_1-H_2)t}|\Phi\rangle = |\Phi\rangle, \tag{9.19}$$

のようになり，自明であることが分かる．実際に，計量 (6.35) も t の並進に対して不変になっている．

9.4 熱化現象

今までは系が有限温度の状態にあるという熱平衡状態を考え，その AdS/CFT 対応を議論した．では，系の温度が時間に依存して変化するような非平衡過程について AdS/CFT 対応はどのように成り立つのであろうか．特に，絶対零度の系からスタートして，系を励起して，最終的に有限温度の状態に近づくような現象は，**熱化現象**と呼ばれ大変興味深い．この熱化現象は AdS/CFT 対応を用いて重力理論の立場で解釈すると，ブラックホールが生成する過程であることは，有限温度がブラックホール状態で表されることからも明らかであろう [82], [83]．

熱化現象を特に理論的にシンプルにした模型が，**量子クエンチ**である．これは，理論のパラメーター（質量や結合定数）をある時間に瞬時に変化させることで系を励起する過程である．例えば，質量を持った場の理論を考え，時刻 $t=0$ で，質量をゼロに持っていくと，無質量理論の励起状態が得られる [84]．このようにして，量子クエンチを用いて共形場理論の励起状態を得ることができ，その時間発展を追うことで熱平衡にどのように近づくか調べることができる．この時に重要な物理量となるのは，エンタングルメント・エントロピーである．

このような熱化現象は，純粋状態のユニタリーな時間発展として記述される．従って，十分時間が経過した後に熱平衡のように見えても，混合状態ではない．しかし，系の自由度の多くを粗視化する（トレース・アウトする）ことで，カノニカル分布と同じ混合状態の密度行列に近づくのである．相関関数のような局所的な相関を見る量では，系全体が純粋状態か混合状態かの区別はつかないので粗視化の過程を見るには不十分である．一方で，エンタングルメント・エントロピーは，純粋状態か，混合状態かの区別することができ，このような目的に適している．以下では，量子クエンチにおけるエンタングルメント・エントロピーの解析を場の理論の立場と AdS/CFT 対応を用いた立場のそれぞれについて説明したい．

9.4.1 量子クエンチの共形場理論を用いた解析

量子クエンチをする前のハミルトニアンを H_0 として，$t=0$ において H に瞬時に変化させるとする．H_0 の基底状態を $|\Phi_0\rangle$ とすると，$t>0$ の時間発展は，

$$\rho_{tot}(t) = e^{-itH}|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|e^{itH}, \tag{9.20}$$

で与えられる．しかしながら $\rho_{tot}(t)$ を具体的に計算して，エンタングルメント・エントロピーを求めるのは特別な場合を除いて困難である．そこで以下で説明するような近似をすることを考えよう [84]．

前述のように H_0 は，質量ギャップを持つハミルトニアンと考えているので，そのギャップに相当するエネルギースケール M より小さなエネルギーをもつモードは，$t<0$ では抑制される．H は質量ギャップのない（=共形場理論の）ハミルトニアンであるので，そのような低エネルギーもモードも伝播できる．一方で，M よりエネルギーの高いモードは，t の符号にかかわらず自由に動き回れる．このような理由で，M 以下のエネルギーを持つモードは，$t>0$ のみの時空を伝播できると思われる．これを時空の幾何学的構造を用いて言い換えると，低エネルギーの観測者が見ると，$t=0$ に境界が存在して，時空自体が $t>0$ に制限されている状況と解釈できる．

この解釈を式で書くと，

$$|\Phi_0\rangle \simeq e^{-H\delta}|B\rangle, \tag{9.21}$$

となる．ここで，$|B\rangle$ は，**境界状態** (boundary state) と呼ばれ，共形場理論に境界を付け加えた状態を表す．つまり，$t=0$ に境界を付与し，そこから δ だけユークリッド時間の発展をさせた状態に相当する（さらに詳しい説明は次節を参照されたい）．$e^{-H\delta}$ の因子は，エネルギーが $1/\delta$ より小さいモードに対して，境界状態を与え，それよりも大きなエネルギーを持つモードに対しては，真空状態を与える効果がある．従って，

$$M \simeq 1/\delta, \tag{9.22}$$

とおくことにすれば，先ほどの状況を実現できることになる．ここで，δ は理論の紫外カットオフ ϵ とは異なる $(\epsilon \ll \delta)$ ことに注意．

この境界状態を用いた近似をレプリカ法の経路積分による記述に適用して，エンタングルメント・エントロピーを計算することができる．特に 2 次元共形場理論の量子クエンチでは，次のような結果が得られることが知られている [84]：

$$\begin{aligned} \Delta S_A &\simeq \frac{\pi c t}{6\delta}, \quad (0 < t < l/2), \\ \Delta S_A &\simeq \frac{\pi c l}{12\delta}, \quad (t > l/2). \end{aligned} \tag{9.23}$$

ここで，ΔS_A は基底状態から，どれだけエンタングルメント・エントロピーが増加したかを表す．また，全体の系は無限に伸びた直線上に定義されているとし，部分系 A は長さ l の線分としている．

直感的に (9.23) を理解するには，$t=0$ に線分の中間点からシグナルが光の速度で伝播すると，$t=l/2$ に両端に達することを考慮すればよい．つまり $l/2$ の時間が経過すると，部分系全体にクエンチの効果が広がり，熱平衡に近い状態になると期待されるのである．実際に，$t > l/2$ の ΔS_A は，温度

$$T_{eff} = \frac{1}{4\delta}, \tag{9.24}$$

の熱力学的なエントロピーに等しいことが分かる．

さて，(9.23) を導出するには，4.4 節で説明したように共形変換を応用すればよい．その詳細は原論文 [84] に譲ることにするが，良い演習問題なので，興味のある読者は自分で考えてみて頂きたい．その代りに，以下では自由フェルミオン系の場合に限定して，境界状態を用いたエンタングルメント・エントロピーの時間発展の具体的な計算を紹介したい [85]．

そこで，2 次元の無質量の自由ディラック・フェルミオン場の量子クエンチを考え，密度行列の時間発展

$$\rho_{tot}(t) = e^{-itH-\delta H}|B\rangle\langle B|e^{itH-\delta H}. \tag{9.25}$$

から S_A の時間依存性を計算したい．

空間座標 σ は円周にコンパクト化されているとし，その長さを 2π とする．また時間座標 t は $t=-i\tau$ とユークリッド化しておく．例えば密度行列 (9.25) のトレースを考えるとすぐに分かるように，今考えている理論は，$0 \le \tau \le 2\delta$ の領域で定義されていることになる．従って，有限サイズの円筒の上に自由場フェルミオンが存在する系を考えている．この円筒の複素座標 $(y, \bar{y})$ を

$$y = \tau - i\sigma, \quad \bar{y} = \tau + i\sigma, \quad (0 \le \tau \le 2\delta,\ 0 \le \sigma \le 2\pi). \tag{9.26}$$

と定義できる．

この時，部分系 A は，時刻 t において A の両端がそれぞれ

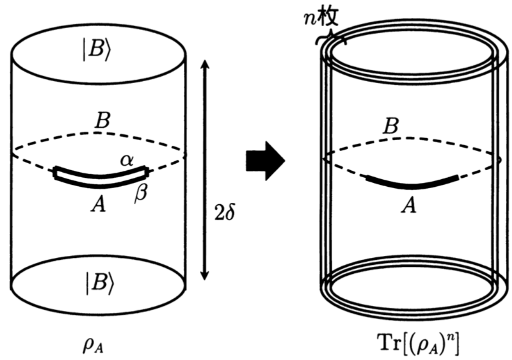


図 9.4 量子クエンチにおけるエンタングルメント・エントロピーの計算.

$$(y_1, \bar{y}_1) = (\delta + it + i\sigma_1, \delta + it - i\sigma_1),$$
$$(y_2, \bar{y}_2) = (\delta + it + i\sigma_2, \delta + it - i\sigma_2), \tag{9.27}$$

と定義される．図 9.4 の左図を参照されたい．今はユークリッド時間を用いて計算しているので，$\delta + it$ は全体が実数であるかのように計算する．すべての計算を実行した一番最後に，t を実数だと思って結果を解析接続するという処方箋を用いる．

無質量自由ディラック・フェルミオン $(\psi(y), \bar{\psi}(y), \tilde{\psi}(\bar{y}), \bar{\tilde{\psi}}(\bar{y}))$ は，前に (4.43) で定義した通りである．3.1 節で説明したようにレプリカ法を経路積分を用いて実行することを考えると，$\mathrm{Tr}[\rho_A^n]$ は，n 枚のシートからなるリーマン面 Σ_n 上の分配関数を用いて表される．ここで Σ_n は前述の円筒を n 枚重ねて A に沿って張り合わせた多様体で，図 9.4 の右図に描かれている．最後に n で微分して $n \to 1$ の極限をとることで，いつものように S_A を求めることができる．

4.3 節で行った解析と同じように，Σ_n 上の経路積分を，$\mathbf{Z}_n$ オービフォールド理論のツイストされた演算子の中で最も共形次元の低い σ_k（式 (4.59) を参照）を挿入することで実現できる．ツイスト演算子 σ_k ともう一組のツイスト演算子 $\tilde{\sigma}_k$ はそれぞれ以下で与えられる：

$$\sigma_k(y, \bar{y}) = e^{i\frac{k}{n}(\varphi(y) - \varphi(\bar{y}))}, \tag{9.28}$$

$$\tilde{\sigma}_k(y, \bar{y}) = e^{i\frac{k}{n}(\varphi(y) + \varphi(\bar{y}))}. \tag{9.29}$$

このようにして，$\mathrm{Tr}[\rho_A^n]$ は，以下のように表すことができる：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho_A(t)^n] &= \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \langle \sigma_k(y_1, \bar{y}_1)\sigma_{-k}(y_2, \bar{y}_2)\rangle_{\text{円筒}} \\ &= \prod_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\langle B|e^{-2\delta H}\sigma_k(y_1, \bar{y}_1)\sigma_{-k}(y_2, \bar{y}_2)|B\rangle}{\langle B|e^{-2\delta H}|B\rangle}.\end{aligned} \tag{9.30}$$

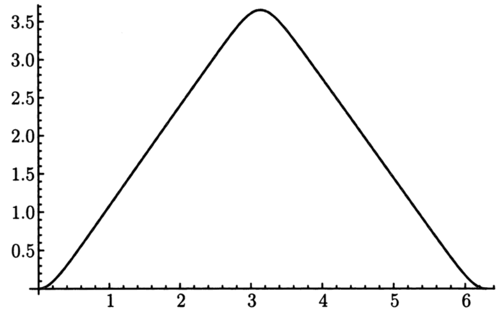


図 9.5 $S_A(\pi/2,\sigma) - S_A(\pi/2,0)$ を σ の関数としてプロットしたもので．$\epsilon = 0.2$ と仮定した.（文献 [85] より.）

ここで，便宜上 k のとりうる値を $k = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \cdots, \frac{n-1}{2}$ と変更した.

あとは，具体的な境界状態の表式を用いて，(9.30) を計算すればよい．詳細はかなり技術的なので次節に譲るが（もしくは原論文[85] を参照），スカラー場 φ の境界条件にはノイマン（境界で，それと垂直な方向への微分がゼロ）と，ディリクレ（境界での値が一定値）の 2 種類あるが，それぞれ σ_k と $\tilde{\sigma}_k$ のツイスト演算子を用いる必要があることが分かる．最終的な結果はどちらの境界条件に対しても同じであり，以下で与えられる：

$$\langle \sigma_k(y_1,\bar{y}_1)\sigma_{-k}(y_2,\bar{y}_2)\rangle_{\text{円筒}}$$
$$= \left(\frac{\eta(\frac{2i\delta}{\pi})^6 \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i} + \frac{\sigma}{2\pi}|\frac{2i\delta}{\pi})||\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i} - \frac{\sigma}{2\pi}|\frac{2i\delta}{\pi})|}{|\theta_1(\frac{\sigma}{2\pi}|\frac{2i\delta}{\pi})|^2 \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i}|\frac{2i\delta}{\pi})|^2} \right)^{\frac{k^2}{n^2}}. \qquad (9.31)$$

ここで $\sigma \equiv \sigma_2 - \sigma_1$ とした．さらに，

$$\sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{12}\left(n - \frac{1}{n}\right), \qquad (9.32)$$

の公式を用いると，エンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A(t,\sigma) = \frac{1}{6}\log \frac{|\theta_1(\frac{\sigma}{2\pi}|\frac{2i\delta}{\pi})|^2 \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i}|\frac{2i\delta}{\pi})|^2}{\eta(\frac{2i\delta}{\pi})^6 \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i} + \frac{\sigma}{2\pi}|\frac{2i\delta}{\pi})||\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i} - \frac{\sigma}{2\pi}|\frac{2i\delta}{\pi})| \cdot \epsilon^2}, \qquad (9.33)$$

と計算される．ここで紫外カットオフ ϵ の依存性を明確にした．$S_A(t,\sigma)$ の具体的な形は，図 9.5 と図 9.6 を参照.

この結果 (9.33) からすぐ分かるように，

$$S_A(t,\sigma) = S_A(t, 2\pi - \sigma) = S_B(t,\sigma) \qquad (9.34)$$

が成り立つ．これは期待通り，系全体が純粋状態であることを表している．また，

$$S_A(t,\sigma) = S_A(t+\pi, \sigma), \qquad (9.35)$$

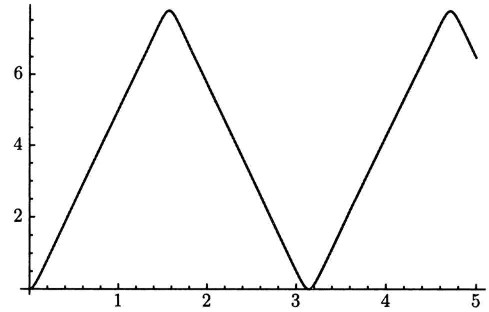


図 9.6 $S_{eff}(t) \equiv 2(S_A(t,\pi) - S_A(0,\pi))$ を t の関数としてプロットしたもの. $\epsilon = 0.2$ とした. (文献 [85] より.)

という周期性を有する. これは自由場理論の特徴で, 系を励起すると, そのままの励起の形を保ちながら円周上を光速で移動するからである. 相互作用している理論では周期性は, はるかに長くなる (ポワンカレ再帰性と呼ばれる).

モジュラー変換をすることで, 次のようにも書き換えられる:

$$S_A(t,\sigma) = \frac{1}{3}\log\frac{2\delta}{\pi\epsilon} + \frac{1}{6}\log\frac{|\theta_1(\frac{i\sigma}{4\delta}|\frac{\pi i}{2\delta})|^2 \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{2\delta}|\frac{\pi i}{2\delta})|^2}{\eta(\frac{\pi i}{2\delta})^6 \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{2\delta} + \frac{i\sigma}{4\delta}|\frac{\pi i}{2\delta})||\theta_1(\frac{\delta+it}{2\delta} - \frac{i\sigma}{4\delta}|\frac{\pi i}{2\delta})|}. \tag{9.36}$$

また, $\delta \to \infty$ の極限をとるとクエンチの効果は消え, 既知の基底状態の結果

$$S_A(\delta = \infty) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{2}{\epsilon}\sin\frac{\sigma}{2}\right), \tag{9.37}$$

を再現する.

逆に $\delta \to 0$ の極限をとると,

$$\begin{aligned} S_A &= S_{div} + \frac{\pi t}{6\delta} \quad \left(0 < t < \frac{\sigma}{2}\right), \\ S_A &= S_{div} + \frac{\pi\sigma}{12\delta} \quad \left(t > \frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \tag{9.38}$$

のように簡単な結果になる ($S_{div} \equiv \frac{1}{3}\log\left(\frac{2\delta}{\pi\epsilon}\right)$ は発散部分). この時, 円周の半径は相対的に無限に大きい極限となり, (9.23) を再現する.

また, 空間の一部をトレース・アウトすることは, ヒルベルト空間を粗視化したことに相当するので, 粗視化したエントロピーを

$$S_{eff}(t) = 2(S_A(t,\pi) - S_A(0,\pi)) = \frac{2}{3}\log\frac{\theta_2(0|\frac{2i\delta}{\pi}) \cdot |\theta_1(\frac{\delta+it}{\pi i}|\frac{2i\delta}{\pi})|}{4\eta(\frac{2i\delta}{\pi})^3 \cdot |\theta_2(\frac{\delta+it}{\pi i}|\frac{2i\delta}{\pi})|}, \tag{9.39}$$

のように定義できる. この量は, カットオフ ϵ に依存しない有限な量である.

9.4.2 境界状態の解析

先に進む前に，前節の議論で説明を省いた境界状態に関してここでは説明をしたい．かなり技術的な話題なので，話の流れを重視する読者は読み飛ばして頂いても以後の議論に差し支えはない．

時間をユークリッド化した 2 次元共形場理論を考える．ユークリッド時間座標を τ，空間座標を σ とし，空間 σ は周期 2π となるようにコンパクト化されているとする．また，任意の時間 τ を指定すると，その時間における量子状態（波動関数）が 1 つ対応する．さて 2 次元空間が $\tau \geq 0$ で定義されるような上半平面（をコンパクト化したもの）で与えられる場合を考えよう．このときには $\tau = 0$ における境界条件を指定する必要があるが，特に共形対称性を保つものを選ぶとする（その選び方は一般に無数にある）．その場合に，$\tau = 0$ の状態として定義される状態を**境界状態** (boundary state) と呼び，$|B\rangle$ と書き表す．

複素座標 $(z, \bar{z})$ を $(z, \bar{z}) = (e^{\tau - i\sigma}, e^{\tau + i\sigma})$ と導入する．境界で共形対称性が保たれる条件は，エネルギー運動量テンソル (4.40) を用いて書くと

$$\left[T(z) - \tilde{T}(\bar{z})\right] |B\rangle = 0. \tag{9.40}$$

と表される．もしくはビラソロ生成子を用いて書き表すと

$$(L_n - \tilde{L}_{-n})|B\rangle = 0, \tag{9.41}$$

となる．これらが，境界状態を定義する条件である．

さて，具体例として前節で扱った自由無質量スカラー場 φ を考えよう．場 φ に作用 (4.43) から従う運動方程式を課してモード展開すると，

$$\begin{aligned}
&\varphi = \varphi(z) + \varphi(\bar{z}), \\
&\varphi(z) = x_L - ip_L z + i \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m}{m} z^{-m}, \\
&\varphi(\bar{z}) = x_R - ip_R \bar{z} + i \sum_{m \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_m}{m} \bar{z}^{-m},
\end{aligned} \tag{9.42}$$

となる．正準量子化を行うことで，

$$\begin{aligned}
&[x_L, p_L] = i, \quad [x_R, p_R] = i, \\
&[\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{n+m,0}, \quad [\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_n] = m\delta_{n+m,0}.
\end{aligned}$$

の交換関係を得る．また φ を周期 $2\pi R$ にコンパクト化すると

$$p_L = \frac{n}{R} + \frac{wR}{2}, \qquad p_R = \frac{n}{R} - \frac{wR}{2}, \tag{9.43}$$

のように量子化される．ここで n は運動量，w は巻きつき数を表す．

このスカラー場の場合には，境界条件としてノイマン条件もしくはディリクレ条件を考えることができる．それぞれ，境界 $\tau = 0$ における以下の条件で定義される：

$$\text{ノイマン}: (\partial_\tau \varphi)|B\rangle = 0 \ \leftrightarrow \ (\alpha_m + \tilde{\alpha}_{-m})|B\rangle = 0, \ n = 0,$$
$$\text{ディリクレ}: (\partial_\sigma \varphi)|B\rangle = 0 \ \leftrightarrow \ (\alpha_m - \tilde{\alpha}_{-m})|B\rangle = 0, \ w = 0.$$

それぞれは，以下のように解くことができる（$\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}'$ は規格化因子）.

$$\begin{aligned} |B\rangle_N &= \mathcal{N} \, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n} \tilde{\alpha}_{-n}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} |w\rangle, \\ |B\rangle_D &= \mathcal{N}' \, e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n} \tilde{\alpha}_{-n}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle. \end{aligned} \tag{9.44}$$

さて，2 つの境界状態で挟んで定義される演算子 $V_{(k_L, k_R)} \equiv e^{ik_L \varphi + ik_R \varphi}$ の 2 点関数を 計算してみよう．これは，有限の長さを持つ円筒における 2 点関数に相当する：

$$\begin{aligned} &\langle V_{(k_L, k_R)}(y_1, \bar{y}_1) V_{(-k_L, -k_R)}(y_2, \bar{y}_2) \rangle_{\text{円筒}} \\ &= \langle B| e^{-2\epsilon H} V_{(k_L, k_R)}(y_1, \bar{y}_1) V_{(-k_L, -k_R)}(y_2, \bar{y}_2) |B\rangle. \end{aligned} \tag{9.45}$$

ここでハミルトニアン H はビラソロ演算子を用いて $H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{1}{12}$ とかける（$-1/12$ の寄与はサイズが有限の空間におけるカシミア効果を表し，平面から円筒への共形変換の規則 (4.54) から導出できる）.

まず，ノイマン境界条件の場合の 2 点関数であるが，(9.45) のゼロモードの部分は以下にようにベーカー・キャンベル・ハウスドルフ (BCH) 公式を用いることで，

$$\begin{aligned} &\sum_{w=-\infty}^{\infty} \langle w| e^{-2\epsilon H} e^{ik_L(x_L - ip_L y_1) + ik_R(x_R - ip_R \bar{y}_1)} \\ &\qquad \cdot e^{-ik_L(x_L - ip_L y_2) - ik_R(x_R - ip_R \bar{y}_2)} |w\rangle \\ &= \sum_{w=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{R^2 w^2 \epsilon}{2}} e^{\frac{R}{2}(k_L w(y_1 - y_2) - k_R w(\bar{y}_1 - \bar{y}_2))} e^{\frac{k_L^2}{2}(y_1 - y_2) + \frac{k_R^2}{2}(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)} \end{aligned} \tag{9.46}$$

と計算できる．それ以外の振動子の部分は以下の公式を用いて計算できる.

$$\begin{aligned} &\langle 0| e^{-\hat{\alpha}\hat{\beta} z} e^{a_L \hat{\alpha} + a_R \hat{\beta}} e^{b_L \hat{\alpha}^+ + b_R \hat{\beta}^+} e^{-\hat{\alpha}^+ \hat{\beta}^+} |0\rangle \\ &\quad = \frac{1}{1 - z} \cdot e^{\frac{a_L b_L + a_R b_R - a_L a_R - z b_L b_R}{1 - z}}. \end{aligned} \tag{9.47}$$

ここで，$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^+] = [\hat{\beta}, \hat{\beta}^+] = 1$ の関係を仮定した．特に，(9.47) において $z = e^{-4n\epsilon}$ や

$$\begin{aligned} a_L &= -\frac{k_L}{\sqrt{n}}(e^{-ny_1} - e^{-ny_2}), \quad a_R = -\frac{k_R}{\sqrt{n}}(e^{-n\bar{y}_1} - e^{-n\bar{y}_2}), \\ b_L &= \frac{k_L}{\sqrt{n}}(e^{ny_1} - e^{ny_2}), \quad b_R = \frac{k_R}{\sqrt{n}}(e^{n\bar{y}_1} - e^{n\bar{y}_2}), \end{aligned} \tag{9.48}$$

のようにおいて，式を少々変形してゆくと 4.5 節で出てきたような θ 関数の計

算に帰着できる．最終的に，以下の結果を得る：

$$
\begin{aligned}
&\langle B|e^{-2\epsilon H}V_{(k_L,k_R)}(y_1,\bar{y}_1)V_{(-k_L,-k_R)}(y_2,\bar{y}_2)|B\rangle_N \\
&=\mathcal{N}^2\left[\sum_{w=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{R^2w^2\epsilon}{2}}e^{\frac{R}{2}(k_Lw(y_1-y_2)-k_Rw(\bar{y}_1-\bar{y}_2))}\right]\cdot \\
&\quad \frac{1}{\eta\left(\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}\cdot\left(\frac{\eta\left(\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)^3}{\theta_1\left(\frac{y_2-y_1}{2\pi i}|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}\right)^{k_L^2}\cdot\left(\frac{\eta\left(\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)^3}{\theta_1\left(\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{2\pi i}|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}\right)^{k_R^2}\cdot \\
&\quad \left(\frac{\theta_1\left(\frac{y_1+\bar{y}_1}{2\pi i}|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)\theta_1\left(\frac{y_2+\bar{y}_2}{2\pi i}|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}{\theta_1\left(\frac{y_1+\bar{y}_2}{2\pi i}|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)\theta_1\left(\frac{y_2+\bar{y}_1}{2\pi i}|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}\right)^{k_Lk_R}.
\end{aligned}
\tag{9.49}
$$

特にスカラー場 φ が，ディラック・フェルミオン ψ と等価となる半径 $R=1$ を仮定して (9.28) で与えられる演算子の 2 点関数を考えると，(9.49) の 2 段目の式は，

$$
\frac{\sum_{w=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{w^2\epsilon}{2}}}{\eta\left(\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}=\frac{\theta_3\left(0|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)+\theta_2\left(0|\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)}{\eta\left(\frac{2i\epsilon}{\pi}\right)},
\tag{9.50}
$$

と書き換えられる．この右辺のそれぞれの項は，ディラック・フェルミオンのそれぞれ NS セクターと R セクターの分配関数 $\langle B|e^{-2\epsilon H}|B\rangle_{NS,R}$ に対応することが分かる．このようにして，(9.31) の結果を得る．

ディリクレ条件の場合の計算は，以上で説明したノイマン条件の場合とほぼ同じなので省略する．

9.4.3 ホログラフィックな計算

AdS/CFT 対応を用いて，重力理論の計算として量子クエンチを解析するには，ブラックホール（空間的に広がっているのブラックブレーンと呼ぶ方がより適している）の生成過程を表す計量を用いる必要がある．そのような計量の中でも簡単な例を挙げるとヴァイダ (Vaidya) 時空が挙げられ，次のような漸近的に $d+2$ 次元 AdS 時空に近づく計量で与えられる：

$$
ds^2=-\left(r^2-\frac{m(v)}{r^{d-1}}\right)dv^2+2dvdr+r^2\sum_{i=1}^{d}dx_i^2.
\tag{9.51}
$$

ここで，$m(v)$ が時刻 v におけるブラックホールの質量に相当し，電磁場のような輻射場が物質場として存在する場合のアインシュタイン方程式の解として得られる．実際，$m(v)$ が定数の場合は，座標変換で AdS シュワツルシルド・ブラックホールの計量に一致することが容易に確かめられる．量子クエンチの一例を，

$$
m(v<0)=0,\quad m(v>0)=m_0,
\tag{9.52}
$$

という関数にとることで実現できる．AdS の境界 $r=\infty$ において，v は境界

の時間に一致することに注意．$v = 0$ で，ブラックホールの質量がゼロから有限の値に瞬時にシフトするが，対応して境界付近の計量が一気に変化する．しかし，内部領域（r が小さい部分）が影響を受けるには時間がかかる．従って，エネルギー密度の期待値 $\langle T_{tt} \rangle$ のような 1 点関数は，クエンチと同時に上昇する．一方，エンタングルメント・エントロピーのような非局所的な量はじわじわと時間をかけて上昇する．この様子を数値的に計算すると，実際に (9.23) と一致する振る舞いが $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ のセットアップで確認されている．詳細は例えば文献 [86] を参照されたい．

一方で，前節で説明した境界状態を用いて近似する手法に対して，AdS/CFT 対応を適用するという方法で解析的に結果を求めることもできる[87] ので以下で説明したい．さて，その準備として，AdS シュワルツシルド・ブラックホール解において，2 つの共形場理論のそれぞれの半分の空間を A_1, A_2 とした場合に，エンタングルメント・エントロピー $S_{A_1 \cup A_2}$ をホログラフィックに計算することを考えてみよう．ここで A_1 と A_2 は，どちらも $x_1 > 0$ として定義できる．便宜上，新しい座標 ρ を z の代わりに導入することで，(6.35) の計量を次のように書き変える：

$$ds^2 = -g^2(\rho)dt^2 + h^2(\rho)\sum_{i=1}^{d} dx_i^2 + d\rho^2, \tag{9.53}$$

$$h(\rho) = \frac{2}{d+1}\left(\cosh\frac{(d+1)\rho}{2}\right)^{2/(d+1)}, \quad g(\rho) = h(\rho)\cdot\tanh\frac{(d+1)\rho}{2}.$$

ここで，表記を簡単にするため $R = z_H = 1$ とおいた（ブラックホールの温度は $T = \beta^{-1} = \frac{1}{2\pi}$ となっている）．

このセットアップでホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを計算してみよう．以下では，γ_A が t の一定面にのっていない場合を考えるので，(8.1) で説明した共変的な公式を用いる必要がある．また，今の場合は対称性より，γ_A は $x_1 = 0$ を満たすのは明らかなので，γ_A は $\rho = \rho(t)$ という関数で指定することができる．従って，この $\rho(t)$ を面積汎関数

$$V_{d-1}\int dt\,(h(\rho))^{d-1}\sqrt{\dot{\rho}^2 - g^2(\rho)}, \tag{9.54}$$

の極値を探すことで決定できる．

前節で説明したように，両境界において時間 t は逆方向に流れており，t が一定となるスライスは図 9.2 にあるように，斜めになる．しかし，今興味があるのは，時間を境界 1 で t，境界 2 で $-t$ の方向にとって，時間発展させたものである．このときは，状態 Φ の時間発展は，

$$e^{-i(H_1+H_2)t}|\Phi\rangle, \tag{9.55}$$

で与えられ，(9.19) とは異なり非自明な時間発展をする．曲面 γ_A は，図 9.3 の

二重線のように地平線を通過することで，両境界に到達する[35],[87]．地平線の内部である領域 II は，領域 I の時間 t と空間座標 ρ を用いると，

$$t = t_I - i\frac{\pi}{2}, \quad \rho = i\eta, \tag{9.56}$$

に相当する．ここで，t_I と η は実数値をとり，それぞれ空間的，時間的な座標となる．この座標変換は，リンドラー時空を思い出して，地平線近傍を平坦な時空で近似すると（$\rho \to 0$ で $g(\rho) \sim O(\rho)$ に注意），その座標は $T = \rho \sinh t$ と $X = \rho \cosh t$ で与えられることから理解できる．つまり，領域 I から II への拡張は，$(T + X > 0, X - T > 0)$ の領域から，$(T + X > 0, X - T < 0)$ の領域への接続に相当するのである．

次に，(9.54) の作用原理を解析しよう．まず，保存量（ハミルトニアン）に着目すると，

$$\frac{g^2 h^{d-1}}{\sqrt{-g^2 + \dot{\rho}^2}} = -i g_0 h_0^{d-1}, \tag{9.57}$$

が成り立つ．ここで，g_0, h_0 は，領域 II で，$\dot{\rho} = 0$ となる点 $\rho = i\eta_0$ における $g(\rho)$ と $h(\rho)$ の値である．微分方程式 (9.57) を解くことで，

$$t(\rho) = -i\frac{\pi}{2} - \int_{i\eta_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{g\sqrt{1 - \frac{g^2 h^{2d-2}}{g_0^2 h_0^{2d-2}}}}. \tag{9.58}$$

と，γ_A が決定される．ここで上の積分は，$\rho = 0$ の pole を避けるように経路を選んでいる．このとき，γ_A の面積は，

$$V_{d-1} \int dt h^{d-1} \sqrt{\dot{\rho}^2 - g^2} = 2V_{d-1} \int_{i\eta_0}^{\infty} d\rho \frac{h^{d-1}}{\sqrt{1 - \frac{g_0^2 h_0^{2d-2}}{g^2 h^{2d-2}}}}, \tag{9.59}$$

で与えられる．右辺で 2 倍しているのは，$\rho = i\eta_0$ が中間点に相当するからである．

ここで，$a(\rho) = -ig(\rho)h^{d-1}(\rho)$ という関数を導入すると，領域 II において実数値をとり，これが最大値をとる ρ の値を $\rho = i\eta_m$ としよう．この最大値をとる点は，図 9.3 に点線として描かれている．この時，$\eta_0 < \eta_m$ であるが，γ_A の面積 (9.59) と t の境界での値 $t(\infty)$ は，η_0 が η_m に近づく極限で互いに比例するように発散する．もっと詳しく調べると，この極限で，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの基底状態の値からの増加分 ΔS_A は，

$$\Delta S_A = \frac{\Delta\gamma_A \text{の面積}}{4G_N} \simeq \frac{V_{d-1}}{2G_N} \cdot a(i\eta_m) \cdot t(\infty), \tag{9.60}$$

と振る舞う．

さて，ここでもとの量子クエンチの問題に戻ろう．前節で説明した境界状態を始状態として用いるアイデアを思い出すとこれは丁度，AdS/CFT 対応に直すと，図 9.7 のように AdS シュワルツシルド・ブラックホールの時空を丁度半

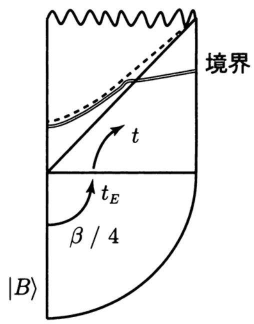


図 9.7 量子クエンチの重力双対の構成を表すペンローズ図．二重線はエンタングルメントエントロピーの計算で用いる極小曲面を表す．

分にした時空に相当することが分かる．この半分の時空は 2 つの境界を持つが，漸近的に AdS な境界は，右の部分（ブラックホールで境界 1 と呼んでいたもの）に相当する．左の境界は，半分にするために手で入れたもので，AdS 時空の内部から，ユークリッド AdS 時空の境界（図の下端）へ伸びている．このような境界は，共形場理論を境界を持つ空間で定義することに相当することが知られている [61]．今の場合は共形対称性が保たれることが時空の構造から期待されるので，共形場理論の境界状態 $|B\rangle$ に対応すると考えられる．さらにユークリッド時間 t_E を $\beta/4$ だけ並進させてから実時間の時空に接続されるので，$t=0$ での状態は，

$$e^{-\frac{\beta H}{4}}|B\rangle, \tag{9.61}$$

で与えられることが分かる．これは，量子クエンチの共形場理論の取り扱いにおいて，現実には紫外領域はクエンチしないことを表すカットオフ δ を $\delta=\beta/4$ のスケールにとることに対応している．

量子クエンチにおけるホログラフィックな計算を考えると，γ_A としては，先ほどブラックホールの時に考えた γ_A の丁度半分をとればよいことが分かる．従って，

$$\Delta S_A(t) \simeq \frac{V_{d-1}}{4G_N}\cdot a(i\eta_m)\cdot t, \tag{9.62}$$

と振る舞うという結論が得られる．ここで，$t(\infty)$ は共形場理論の時間 t であることを考慮した．ブラックホールのエントロピー密度は，$s=\frac{h^d(0)}{4G_N}$ で与えられることから，(9.62) は，

$$\Delta S_A \simeq v\cdot V_{d-1}st, \tag{9.63}$$

と表すことができる．ここで，v は量子エンタングルメントの伝わる有効速度を解釈でき，$v=a(i\eta_m)/h^d(0)$ と定義される．$d=1$ の場合は，$v=1$ である

が，$d \geq 2$ の場合は，$1/2 < v < 1$ となる [87], [88].

有限の幅 l の部分系 A に対して，$t \ll l$ の場合に S_A を計算することを考えると，A の境界 ∂A は 2 つの平面から構成されるので，この場合の γ_A は，今まで議論した γ_A を 2 つ合わせた（連結していない）曲面となることが分かる．従って，結果として S_A は，(9.63) の 2 倍となる．従って，$d = 1$ の場合は，前節で説明した 2 次元共形場理論の結果と係数を含めて一致することが分かる．また，高次元 $d > 1$ では，場の理論に基づく計算が困難であるが，AdS/CFT 対応の結果 (9.63) は，S_A がやはり時間に比例して増加するという予言を与えている．

最後に，AdS/CFT 対応における純粋状態と混合状態の区別に触れたい．上記のように量子クエンチをブラックホールの生成過程と解釈すると，最終的にはほとんど静的なブラックホールが生成されるので，系全体のエントロピーは正になると思うかもしれない．そうだとすると混合状態のはずで，もともと純粋状態からスタートしているので，時間発展がユニタリーではないことになり問題が生じる．このパラドクスを解くには，共変的なホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの計算を思い出せばよい．過去にさかのぼるとブラックホールは存在しないので，部分系 B を A の補集合とするとそれぞれの極値曲面 γ_A と γ_B は，過去の方向に変形すると互いにスムーズに移り合う，つまりホモロジカルであることが分かる．従って，S_A と S_B は両者とも，γ_A と γ_B の面積のうちで小さいほうで与えられるので，$S_A = S_B$ が成り立つ．このようにして，実は常に純粋状態で居続けることが確認できる．つまり全体系のエントロピーはゼロなのである．では，生成するブラックホールの地平線の面積はどのような意味を持つのだろうか？　答えはというと，粗視化して得られるエントロピーと解釈できるのである．この一例が，(9.39) で定義されたエントロピー S_{eff} である．このように粗視化すると，純粋状態と混合状態を区別することができず，どちらもブラックホールに対応する．しかし，時空の大域的な構造を調べることでそれを区別することができ，そのときに役に立つ物理量がエンタングルメント・エントロピーなのである．

9.5 励起状態におけるエンタングルメント・エントロピー

さて，本節ではより一般的な励起状態におけるエンタングルメント・エントロピーの振る舞いを説明したい．前節で取り上げた（大域的な）量子クエンチは，系全体を一様に瞬時に励起するという励起状態の中で特別な場合に相当する．本節では最初に共形場理論におけるエネルギーの小さな励起状態に対して成り立つ法則を AdS/CFT 対応を用いて導出する．その後で AdS/CFT 対応を用いない導出法を説明したい．また，特に空間的に局在している励起に関しては次の節で解説する．

9.5.1 AdS/CFT 対応を用いた摂動論

AdS/CFT 対応において，共形場理論の基底状態は AdS 時空そのものに対応することは既に見てきたとおりである．従って，共形場理論にエネルギーを外から与えて励起した状態は，AdS 時空を変形することに相当する．高エネルギーな励起であれば，長さのスケールを表す座標である z の小さな領域を大きく変形するであろうし，低エネルギーな励起であれば，z の大きな領域を変形するであろう．エンタングルメント・エントロピーの計算を考えると，重力理論の計量がどのように変形するかによって計算結果が決定される．

特に簡単のため，空間的に並進対称性と回転対称性を有する励起状態を考えよう．この場合に，変形された AdS 時空は次の形で一般的に表される：

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left[-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum_{i=1}^{d}(dx_i)^2\right]. \tag{9.64}$$

有限のエネルギーを持つ励起を考えるので，紫外極限 $z \to 0$ では，励起の影響は存在しないので，境界付近では AdS 時空の計量に近づき，真空のアインシュタイン方程式を満たす．従って $z \to 0$ の極限で，

$$g(z) \simeq 1/f(z) \simeq 1 + mz^{d+1} + O(z^{d+2}), \tag{9.65}$$

と振る舞うことが分かる．ここで m は任意の定数であり，励起の強さを表すパラメーターである．共形場理論のエネルギー運動量テンソルを AdS/CFT 対応に基づいて (6.52) のように計算すると，

$$T_{tt} = \frac{dR^d m}{16\pi G_N}. \tag{9.66}$$

を得る．つまり，m は励起のエネルギー密度に比例する．

さて一方の赤外領域，つまり z が大きい領域においては，励起によって計量が大きく変化しその様子は励起の詳細に大きく依存してしまう．例えば，赤外領域にブラックホールが生成される場合もあるし，重い星のような構造物が形成される場合もある．そこで，その詳細によらない性質としてどのようなことが言えるのか考えてみよう．そのためには，紫外領域のみに依存する量を見つけ出す必要がある．実際に (9.66) で与えられるエネルギー運動量はそのような量の筆頭である．なぜならばホログラフィックな計算法から明らかなように，紫外領域でどのように AdS 時空から計量がずれるのか測った量に相当するからである．同様に，任意の演算子の 1 点関数を考えると紫外領域のみの振る舞いに依存する量となる．

それではエンタングルメント・エントロピーの立場で，このように紫外領域の振る舞いのみに依存する量を見出せるであろうか？　答えは簡単で，部分系 A のサイズ l を

$$ml^d \ll 1, \tag{9.67}$$

を満たすように小さくとればよい [89]．この条件は共形場理論の立場では

$$T_{tt} \cdot l^{d+1} \ll R^d/G_N \sim O(N^2). \tag{9.68}$$

と表されるので，l が小さいという条件はエネルギー密度 T_{tt} が小さいと言い換えることもできる．

特に，部分系 A が球面：$r^2 \equiv \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq l^2$ で与えられる場合に具体的に計算を行ってみよう．極小曲面 γ_A を $r = r(z)$ と表すと，その面積は

$$\text{面積} = R^d \text{Vol}(\mathbf{S}^{d-1}) \int_\epsilon^u \frac{dz}{z^d} \cdot r(z)^{d-1} \sqrt{g(z) + r'(z)^2},$$

と求まり，ここで $\text{Vol}(\mathbf{S}^{d-1}) = 2 \cdot \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ は，単位 $d-1$ 次元球面の体積である．

面積を最小にすることで得られる運動方程式から，$r(z)$ が m の 1 次のオーダーで以下のように変形されることが分かる：

$$r(z) = \sqrt{u^2 - z^2} + m \frac{2u^{d+3} - z^{d+1}(u^2 + z^2)}{2(d+2)\sqrt{u^2 - z^2}}. \tag{9.69}$$

ここで，γ_A は $z = 0$ から $z = u$ まで伸びていると仮定し，$z = u$ で曲面が特異点を持たないという条件を課している．このとき u と l の関係は，$l = r(0) = u + mu^{d+2}/(d+2)$ で与えられる．以上で求めた γ_A の面積は，

$$\text{面積} = R^d \Omega_{d-1} \int_\epsilon^u dz \frac{u}{z^d} (u^2 - z^2)^{\frac{d-2}{2}} \cdot (1 + mK(z)),$$

$$K(z) \equiv \frac{2(d-1)u^{d+3} - 2u^{d+1}z^2 + (4+d)u^2 z^{d+1} - 3dz^{d+3}}{2(d+2)(u^2 - z^2)}.$$

と計算され，積分を実行することで m に関する 1 次のオーダーに対して，エンタングルメント・エントロピーの励起による変化分 ΔS_A は，

$$\Delta S_A = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{4(d+2)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \frac{R^d}{G_N} \cdot m l^{d+1}, \tag{9.70}$$

と求められる．

一方で，A の領域におけるエネルギー E_A を

$$E_A = \int_A d^d x \, T_{tt}, \tag{9.71}$$

と計算し，(9.70) と比較すると

$$\frac{\Delta S_A}{\Delta E_A} = \frac{2\pi}{d+1} \cdot l, \tag{9.72}$$

の関係式を得る．

また計算の詳細は省くが，部分系 A が幅 l の帯状の場合に同様な計算を行うと，最終的な結果を書くと

$$\frac{\Delta S_A}{\Delta E_A} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \cdot l \tag{9.73}$$

となる．

以上の結果から分かったことは，部分系 A のサイズが十分小さく (9.67) を満たす場合には，エンタングルメント・エントロピーの変化 ΔS_A とエネルギーの変化 ΔE_A は比例関係にあり，その比例係数は，l に定数を掛けたもので与えられる．より一般の形の部分系 A に対しても同様の結果が成り立つことも容易に理解できる．まとめると次のような関係式を得たことになる：

$$T_{ent} \cdot \Delta S_A = \Delta E_A. \tag{9.74}$$

ここで，T_{ent} は

$$T_{ent} = c_{ent} \cdot l^{-1}, \tag{9.75}$$

のように与えられ，c_{ent} は部分系 A の形のみ依存する幾何学的な定数である．例えば A が球面内で与えられる場合は，(9.72) から分かるように $c_{ent} = \frac{d+2}{2\pi}$ で与えられる．

このように (9.74) のように書くと，**熱力学の第一法則に類似している**ことに気が付く．ΔS_A は励起によって増加したエンタングルメント・エントロピーを表すので，励起によって増加した情報量と励起エネルギーの間に，(9.74) で与えられるような第一法則に類似した関係式が共形場理論に対して得られたことになる．これは熱平衡状態について成り立つ第一法則がエンタングルメント・エントロピーを用いると，より一般の非平衡状態に対しても成り立つ場合があることを意味しており興味深い．実際に，有限温度の共形場理論で l を大きくとり，(9.67) の条件を最大に破る極限を考えると T_{ent} は系の温度に近づくことが分かる．このように l の値を変えることで通常の熱力学第一法則とここで説明した新しい関係式 (9.74) をスムーズにつなぐことができるのである．

関係式 (9.74) は，AdS/CFT 対応の古典重力極限で得られた結果であるので，共形場理論の強結合かつラージ N 極限において成り立つべき式である．しかしながら，A が球面の場合（2 次元共形場理論の場合は線分の場合）においてはこの関係式を任意の共形場理論に対して証明できる．証明は次節で述べることにして，ここでは簡単に解析できる有限温度の 2 次元共形場理論の場合について説明しよう．

温度 $T = \beta^{-1}$ における 2 次元共形場理論におけるエンタングルメント・エントロピーは，(4.81) で与えられる．従って，$l \ll \beta$ の場合に，

$$\Delta S_A = \frac{c\pi^2 T^2 l^2}{18} = \frac{Rml^2}{48G_N} = \frac{\pi}{3} l \cdot \Delta E_A, \tag{9.76}$$

となり，確かに (9.74) が成り立つことが確かめられる．ここで，球面の半径 l は，線分の長さが $2l$ の場合に相当することに注意されたい．

9.5.2 相対エントロピーを用いた一般論

以上のように，AdS/CFT 対応を用いた解析から熱力学第一法則に類似した法則を導くことができた．さて今度は，場の理論の解析だけからも同様の性質を導くことができることを文献 [90] に従って説明しよう．

この時に大変役に立つ量が，**相対エントロピー**である．相対エントロピーは，2 つの密度行列（ρ_0 と ρ_1 と呼ぶことにする）の差の大きさを測る量の一つで，

$$S(\rho_1|\rho_0) = \mathrm{Tr}[\rho_1 \log \rho_1] - \mathrm{Tr}[\rho_1 \log \rho_0] \geq 0, \tag{9.77}$$

と定義される．相対エントロピーは非負な量であり，$\rho_0 = \rho_1$ の場合のみゼロになる．そのことは，$f(x)$ を上に凸な関数（2 階微分が負）とすると

$$\mathrm{Tr}[f(\rho_1) - f(\rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)f'(\rho_0)] \leq 0, \tag{9.78}$$

が成り立つことから理解できる．実際に上式で $f(x) = -x \log x$ と置くと $S(\rho_1|\rho_0) \geq 0$ が導かれる．

例えば，ρ_0 を熱平衡状態のカノニカル分布

$$\rho_0 = \frac{e^{-H/T}}{\mathrm{Tr}[e^{-H/T}]}, \tag{9.79}$$

としよう．ρ_1 はカノニカル分布からずれた一般の非平衡状態として，相対エントロピーを計算すると

$$S(\rho_1|\rho_0) = \beta(F(\rho_1) - F(\rho_0)) \geq 0, \tag{9.80}$$

が示される．ここで，$F(\rho)$ は自由エネルギーで以下のように定義される：

$$F(\rho) = E(\rho) - TS(\rho) = \mathrm{Tr}[H\rho] + T\mathrm{Tr}[\rho \log \rho]. \tag{9.81}$$

このようにして，相対エントロピーの非負性から，自由エネルギーが熱平衡状態で最小になるという熱力学で良く知られた結果を導くことが分かる．

さて本題であるエンタングルメント・エントロピーへの相対エントロピーの応用を考えよう．まず全系の基底状態を考え，部分系 A に制限された密度行列 ρ_A を

$$\rho_A = e^{-H_A}, \tag{9.82}$$

と書き直すことで，部分系 A に対するハミルトニアン（モジュラーハミルトニアンと呼ばれる）を定義する．任意の励起状態に対する A に制限された密度行列を ρ'_A と書くことにしよう．この時ハミルトニアンを H_A とすると，そのエネルギー期待値は $\langle H_A \rangle = \mathrm{Tr}[H_A \rho'_A]$ として計算される．基底状態の値 $\mathrm{Tr}[H_A \rho_A]$ を差し引いた値を $\Delta\langle H_A \rangle$ と書くと，相対エントロピーの非負性から

$$S(\rho'_A|\rho_A) = \Delta\langle H_A \rangle - \Delta S_A \geq 0, \tag{9.83}$$

を得る．ここで ΔS_A は，励起状態 ρ'_A と基底状態 ρ_A におけるエンタングルメント・エントロピーの差を表す．この式 (9.83) は重力理論においてベッケンシュタイン・バウンドと呼ばれる不等式に類似して興味深い．ベッケンシュタイン・バウンドは，ある領域内に物質を詰め込みすぎると重力崩壊を起こしてしまうことから予想される不等式で，

$$S_\Sigma \leq 2\pi R E_\Sigma, \tag{9.84}$$

と表される．ここで，S_Σ と E_Σ は，ある領域 Σ に含まれるエントロピーとエネルギーを表す．R は領域 A の半径である．

このように得られた関係式 (9.83) は不等式であるが，特に ρ'_A と ρ_A の差が小さい時には，不等号が等号になり

$$\Delta\langle H_A\rangle = \Delta S_A, \tag{9.85}$$

となることが分かる．このようにして，励起状態が基底状態にとても近い場合は，熱力学第一法則に類似した法則が一般に得られるのである．

特に $d+1$ 次元共形場理論を考えて，d 次元の部分系 A を半径 l の球面内と選ぶと，モジュラーハミルトニアン H_A は共形場理論のエネルギー密度 T_{tt} を用いて

$$H_A = 2\pi \int_{|x|\leq l} d^d x \left(\frac{l^2 - |x|^2}{2|x|}\right) T_{tt}(x), \tag{9.86}$$

で与えられることが共形変換をうまく用いることで示される [48]．特に T_{tt} が空間座標に依存しない一定値をとると仮定すると，AdS/CFT 対応を用いて得た結果 (9.74) に帰着することが分かる．

9.6 局所的な励起状態と AdS/CFT 対応

前節では励起状態のエンタングルメント・エントロピーに対する一般的な性質を説明した．そこで本節では，空間的に局在した励起に対して具体的にどのように AdS/CFT 対応を構成するのか，またその場合のエンタングルメント・エントロピーの計算について触れたい [91]．空間的に一様な励起を与えた時にどのようにエンタングルメント・エントロピーが時間発展するのかに関しては 9.4 節ですでに取りあげた．この場合は空間的に広がるブラックホール（つまりブラックブレイン）が生成される過程に対応した．一方，ここで考えたい空間的に局在した励起は，局在したブラックホール，ないし星のような物体が生成される過程に対応する．瞬時に系を一様に励起するモデルを大域的量子クエンチと呼ぶことは既に述べたとおりであるが，同様に瞬時に局所的に系を励起する過程を**局所量子クエンチ** (local quench) と呼ぶ [92]．

9.6.1 AdS/CFT 対応を用いた局所量子クエンチの記述

そこで，まず局所量子クエンチがどのように AdS/CFT 対応で記述できるのか説明しよう [91]．$d+1$ 次元の共形場理論を考え，ある点（原点とする）の周り半径 α 程度以内の領域を励起する場合を考えよう．AdS/CFT 対応において，長さ α 程度の励起は $z=\alpha$ 程度の変形として記述されるので，$z=\alpha$ に何か重い物体（質量を m とする）を置くことに相当すると推測することができる．実際にすぐあとで確かめるようにこのような単純なモデルが局所クエンチの AdS/CFT 対応となっていることが分かる．

AdS 時空においては，その曲がった計量からすぐわかるように赤外（地平線）方向へ重力は働くので，その質量 m の粒子は z が大きい方へ動く．ポワンカレ座標 (6.6) における粒子の位置を

$$z=z(t), \quad x_i=0 \quad (t\equiv x_0), \tag{9.87}$$

とする．その時に粒子の作用は次のように与えられる：

$$S_p=-mR\int dt\frac{\sqrt{1-\dot{z}(t)^2}}{z(t)}. \tag{9.88}$$

その運動方程式は簡単に解くことができ，粒子の運動は

$$z(t)=\sqrt{(t-t_0)^2+\alpha^2}, \tag{9.89}$$

と求められる．ここで，t_0 と α は積分定数であり，以下では $t_0=0$ とおく．粒子の運動 (9.89) は，$t=0$ で $z=\alpha$ に静止しており，その後の時間発展では重力によって $z\to\infty$ へ落ち込んでゆく．AdS 時空におけるこの粒子の持つエネルギーは,

$$E=\frac{mR}{\alpha}, \tag{9.90}$$

で与えられることにも注意しておこう．

従って，このように AdS 時空中で自由落下する物体のバックリアクションをアインシュタイン方程式

$$R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R+\Lambda g_{ab}=8\pi G_N T_{ab}, \tag{9.91}$$

に基づいて計算して計量を求めればよいことになる．ここで T_{ab} は，$d+2$ 次元時空中のエネルギー運動量テンソルに対する粒子の寄与を表す．直接このような計算を行うと大変複雑であるが，今の場合には実は簡単に答えを求めることができるので紹介したい [93]．

基本的なアイデアは，まず大域的な AdS 時空 (6.4) とポアンカレ AdS 時空 (6.6) の間を結ぶ座標変換 (6.5) を利用することである [93]．大域的な AdS の原点 $r=0$ に静止した重い点粒子を考えると，それがアインシュタイン方程式に従ってバックリアクトとした時空は，大域的な AdS におけるブラックホールと

なる．その計量はよく知られていて，

$$ds^2 = -\left(r^2 + R^2 - \frac{M}{r^{d-1}}\right)d\tau^2 + \frac{R^2 dr^2}{R^2 + r^2 - M/r^{d-1}} + r^2 d\Omega_d^2, \quad (9.92)$$

で与えられる．$d\Omega_d^2$ は単位球面 $\mathbf{S}^d$ の計量を表す．M は，ブラックホールの質量に比例し，粒子の質量 m とは

$$m = \frac{d\pi^{d/2-1/2}}{8\Gamma(d/2+1/2)} \cdot \frac{M}{G_N R^2}, \quad (9.93)$$

という関係にある．$d = 1(\mathrm{AdS}_3)$ の場合に限って，上記の解は $M < R^2$ の時にはブラックホールではなく原点に特異点を持つ解となる．しかしながら，実際に局所的な励起を考える場合に必ずしも点粒子のようにサイズがゼロの物体を考える必要はなく，有限の小さなサイズを持つと考えても結果の興味がある部分は変わらない．従って物体のサイズがブラックホールの地平線より外側に来る場合を考えることができ，その時はブラックホールではなく，星のような解となり特異点も解消される．

さて，この解 (9.92) に対して座標変換 (6.5) を行うとどうなるであろうか．ここで，座標変換を少しだけ一般化して

$$\begin{aligned}
\sqrt{R^2+r^2}\cos\tau &= \frac{R^2 e^{\beta} + e^{-\beta}(z^2 + x^2 - t^2)}{2z}, \\
\sqrt{R^2+r^2}\sin\tau &= \frac{Rt}{z}, \\
r\Omega_i &= \frac{Rx_i}{z} \quad (i = 1, 2, \cdots, d), \\
r\Omega_{d+1} &= \frac{-R^2 e^{\beta} + e^{-\beta}(z^2 + x^2 - t^2)}{2z},
\end{aligned} \quad (9.94)$$

を考えると便利である．パラメーター β だけ拡張されており，$\beta = 1$ とすると (6.5) に帰着する．また，任意の β において，大域的な AdS 時空 $(M = 0)$ をこの座標変換で移すとポワンカレ時空になることが分かる．$r = 0$ におかれた静止した粒子は，座標変換後には

$$x_i = 0, \quad z^2 - t^2 = R^2 e^{2\beta}, \quad (9.95)$$

の軌跡を運動することになり，これは

$$\alpha = Re^{\beta}, \quad (9.96)$$

とおくと丁度 (9.89) と一致する．従って，先ほど局所クエンチに対応すると考えたポワンカレ時空中を運動する粒子に対応することになる．このようにして，(9.92) に対して座標変換 (9.94) を行って得られる時空が局所クエンチの AdS/CFT 対応を記述すると期待される．

9.6.2 エネルギー運動量テンソル

AdS 時空を落下する粒子に関する AdS/CFT 対応を理解する上で役に立つ物理量の一つは，共形場理論のエネルギー運動量テンソルである．これは (9.92) に (9.94) の座標変換を施して得られる計量に (6.52) の公式を適用することでホログラフィックに計算することができる．2 次元 ($d=1$) 共形場理論の場合は，$u=t-x_1$，$v=t+x_2$ という光円錐座標，高次元の場合は $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{d-1}x_i^2}$ という動径座標を定義すると，$d=2,3,4$ の場合のホログラフィックなエネルギー運動量テンソルは以下のように計算される：

$d=1$ (AdS_3)：

$$T_{uu}=\frac{M\alpha^2}{8\pi G_N R(u^2+\alpha^2)^2},\quad T_{vv}=\frac{M\alpha^2}{8\pi G_N R(v^2+\alpha^2)^2},\quad T_{uv}=0. \tag{9.97}$$

$d=2$ (AdS_4)：

$$T_{uu}=\frac{3M\alpha^3}{8\pi G_N R(u^2+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{v^2+\alpha^2}},\ T_{uv}=\frac{M\alpha^3}{8\pi G_N R(u^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}(v^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$T_{vv}=\frac{3M\alpha^3}{8\pi G_N R(v^2+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}\sqrt{u^2+\alpha^2}},\ T_{\theta\theta}=\frac{3M\alpha^3(u-v)^2}{8\pi G_N R(u^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}(v^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$d=3$ (AdS_5)：

$$T_{uu}=\frac{M\alpha^4}{\pi G_N R\,(\alpha^2+u^2)^3\,(\alpha^2+v^2)},\ T_{uv}=\frac{M\alpha^4}{2\pi G_N R\,(\alpha^2+u^2)^2\,(\alpha^2+v^2)^2},$$
$$T_{vv}=\frac{M\alpha^4}{\pi G_N R\,(\alpha^2+u^2)\,(\alpha^2+v^2)^3},$$
$$T_{\theta\theta}=\frac{M\alpha^4(u-v)^2}{4\pi G_N R\,(\alpha^2+u^2)^2\,(\alpha^2+v^2)^2},\ T_{\phi\phi}=\frac{M\alpha^4\sin^2\theta(u-v)^2}{4\pi G_N R\,(\alpha^2+u^2)^2\,(\alpha^2+v^2)^2}.$$

ここで，角度座標は $\mathbf{R}^{1,d}$ の計量が $ds^2_{d=2}=-dt^2+d\rho^2+\rho^2 d\theta^2$，$ds^2_{d=3}=-dt^2+d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$ ($d=3$) となるように定義した．このように求められたエネルギー運動量テンソルが，トレースがゼロの条件 $T_{ab}\eta^{ab}=0$ や，保存則 $\partial_a T^{ab}=0$ を満たすことはすぐに確認できる．

特にエネルギー密度 T_{tt} は，それぞれ以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}
d=1:\quad T_{tt}&=\frac{M\alpha^2}{4\pi G_N R}\cdot\frac{(t^2+x^2+\alpha^2)^2+4t^2x^2}{((x^2-t^2-\alpha^2)^2+4x^2\alpha^2)^2},\\
d=2:\quad T_{tt}&=\frac{M\alpha^3}{\pi G_N R}\cdot\frac{(\rho^2+t^2+\alpha^2)^2+2\rho^2t^2}{((\rho^2-t^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\rho^2)^{\frac{5}{2}}},\\
d=3:\quad T_{tt}&=\frac{M\alpha^4}{\pi G_N R}\cdot\frac{3(\rho^2+t^2+\alpha^2)^2+4\rho^2t^2}{((\rho^2-t^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\rho^2)^3}.
\end{aligned} \tag{9.98}$$

この表式から任意の次元 d において

$$\int d^d x T_{tt}=\frac{mR}{\alpha}=E, \tag{9.99}$$

が成り立つことが確認できる．従って期待通りに，エネルギーの合計が粒子の持つエネルギー (9.90) に等しいことが分かる．パラメーター α は，ピークの幅，つまり励起のサイズの見積りを与える．特に $\alpha \to 0$ の極限を考えると T_{tt} は δ 関数に近づくことが分かる．

エネルギー密度 T_{tt} の関数形から明らかなように，$t = |x|$ を中心に励起のピークを持つ．特に $d = 1$ の場合は，$x_1 = t$ と $x_1 = -t$ に 2 つのピークを持ち，光速でそれぞれが遠ざかってゆく．このように光速で励起が伝播する振る舞いは，共形場理論が質量ゼロの相対論的な理論であることから自然に理解できる．

9.6.3 エンタングルメント・エントロピー

さてそれでは，この局所的な励起を記述する模型において，エンタングルメント・エントロピーを計算してみよう [91]．前節で説明した熱力学の第一法則に類似した関係式 (9.74) を思い出すと，エンタングルメント・エントロピーはエネルギー運動量テンソルをより一般化した量とみなすこともできる．

任意の次元 d で計量は既に構成した通りであり，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを解析することは可能であるが，本書では特に解析的な計算が容易な $d = 1(\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2)$ の場合に限定して説明したい．このときは $d\Omega_{d=1}^2 = d\theta^2$ のように $\mathbf{S}^1$ の座標 θ を用いて書ける．

部分系 A は長さ $2l$ の線分とする．この場合，以下のように厳密に測地線 γ_A を求めることができる．まず漸近的に大域的 AdS 時空となる (9.92) における測地線を計算する．その後で (9.94) の座標変換を施せばよいのである．

AdS 時空の境界付近では，(9.92) における点 $(\tau_\infty, \theta_\infty, r_\infty)$ と (9.94) の座標変換を施して得られるポワンカレ AdS 時空における点 (t, z_∞, x_∞) の関係は以下で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\tan\tau_\infty &= \frac{2Rt}{R^2 e^{\beta} + e^{-\beta}(x_\infty^2 - t^2))}, \\
\tan\theta_\infty &= -\frac{2Rx_\infty}{e^{-\beta}(x_\infty^2 - t^2) - R^2 e^{\beta}}, \\
r_\infty &= \frac{1}{z_\infty}\sqrt{R^2 x_\infty^2 + \frac{1}{4}\left(e^{-\beta}(x_\infty^2 - t^2) - R^2 e^{\beta}\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{9.100}
$$

ここで z_∞ は共形場理論の紫外カットオフと解釈される．また，τ_∞ と θ_∞ の取りうる値は $[-\pi, \pi]$ としている．

さて，(9.92) における測地線 γ_A を，

$$
\tau = \tau(\theta), \quad r = r(\theta), \tag{9.101}
$$

と表すと，その長さ $|\gamma_A|$ は，

$$
|\gamma_A| = \int d\theta \sqrt{r^2 + \frac{R^2}{r^2 + R^2 - M} r'^2 - (r^2 + R^2 - M)\tau'^2} \tag{9.102}
$$

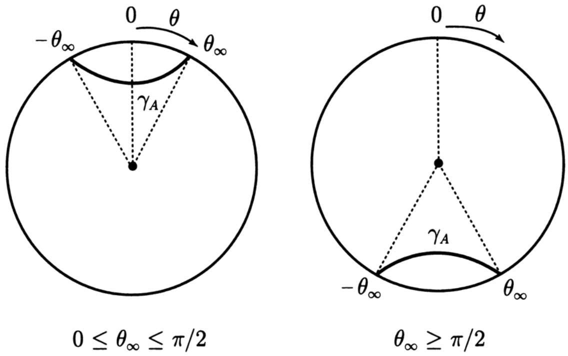


図 9.8 時空 (9.92) における測地線 γ_A の振る舞い．左図と右図は，それぞれ $0 \le \theta_\infty \le \pi/2$ と $\theta_\infty \ge \pi/2$ の場合に相当する．(文献 [91] より．)

と与えられる．

$|\gamma_A|$ が極値をとる条件は，A, B を積分定数として

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{Ar^2}{r^2 + R^2 - M},$$
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{R}\sqrt{A^2r^2 + (B^2r^2 - 1)(r^2 + R^2 - M)}, \tag{9.103}$$

と表される．

9.6.4 部分系 A の中心が励起される場合

まず，部分系 A が $-l \le x_1 \le l$ で与えられる場合のエンタングルメント・エントロピーを解析する．局所的な励起は $t = 0$ において $x_1 = 0$ 近傍で与えられるので，部分系の中心が励起されることになる．時空 (9.92) において，時間一定面 $\tau = \tau_\infty$ における線分 $-\theta_\infty \le \theta \le \theta_\infty$ に相当する．ここで，$0 < \theta_\infty < \pi$ の値をとりうる．図 9.8 を参照されたい．τ を一定値にとれるので，極値を取る条件 (9.103) は，次のように簡単になる：

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{Rr_*}\sqrt{(r^2 + R^2 - M)(r^2 - r_*^2)}. \tag{9.104}$$

ここで，$r = r_*$ は積分定数であり，r_* は測地線 γ_A における r の最小値（折り返し点）を表す．

(i) $M \le R^2$ の場合

まず，$M - R^2 \le 0$ を仮定して話を進める．この場合は，(9.92) の時空は損失角による特異点が $r = 0$ に存在する．もしも θ の周期が $2\pi\frac{R}{\sqrt{R^2-M}}$ であれば特異点は消えるが，今は 2π にとっていることに注意．ただし $r = 0$ に局在する物体のサイズが有限であることを考慮すればこの特異点は消えるので問題はない．

さて $0 < \theta_\infty < \frac{\pi}{2}$ の場合は，最小の長さになる測地線 γ_A は，$-\theta_\infty \le \theta < \theta_\infty$

の線分（図 9.8 の左図を参照）で与えられ，$\theta=0$ は折り返し点 $r=r_*$ に対応する．従って，

$$\begin{aligned}\theta_\infty &= \int_{r_*}^{\infty} dr \frac{Rr_*}{r\sqrt{(r^2+R^2-M)(r^2-r_*^2)}} \\ &= \frac{R}{2\sqrt{R^2-M}}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{R^2-M-r_*^2}{R^2-M+r_*^2}\right)\right],\end{aligned} \tag{9.105}$$

であることが分かり，これを

$$\cos\left(\frac{2\sqrt{R^2-M}}{R}\theta_\infty\right)=\frac{r_*^2-R^2+M}{r_*^2+R^2-M}, \tag{9.106}$$

と書き直すことができる．

このようにして最終的にホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを

$$\begin{aligned}S_A &= \frac{R}{2G_N}\int_{r_*}^{r_\infty} dr \frac{r}{\sqrt{(r^2+R^2-M)(r^2-r_*^2)}} \\ &= \frac{R}{2G_N}\log\frac{2r_\infty}{\sqrt{R^2-M+r_*^2}},\end{aligned} \tag{9.107}$$

と求めることができる．

また $\theta_\infty > \frac{\pi}{2}$ の場合は，γ_A は，$\theta_\infty < |\theta| < \pi$ で定義される測地線（図 9.8 の右図参照）で与えられる．純粋状態に対して $S_A=S_B$ が成り立つことも確認できる．ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは，θ_∞ を $\pi-\theta_\infty$ で置き換えることで (9.107) から求めることができる．

(ii) $M>R^2$ の場合

$M>R^2$ の場合は，時空 (9.92) は BTZ ブラックホールとなる．計算は，先述 (i) の場合とほぼ同じで，具体的には $\sqrt{R^2-M}\to i\sqrt{M-R^2}$ という解析接続を (i) の結果に対して行えばよい．関係式 (9.106) は，以下のように変わる：

$$\cosh\left(\frac{2\sqrt{M-R^2}}{R}\theta_\infty\right)=\frac{r_*^2-R^2+M}{r_*^2+R^2-M}. \tag{9.108}$$

$0<\theta_\infty<\frac{\pi}{2}$ の場合は，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー S_A は，(9.107) で与えられ，$\theta_\infty>\frac{\pi}{2}$ の場合は，θ_∞ を $\pi-\theta_\infty$ で置き換えることで得られる．

今の計算ではブラックホール解を用いているが，考えている励起状態は純粋状態なので，正確にはブラックホールの地平線近傍を星のような物体で置き換えて考えている．従って，その中を γ_A はすり抜けることができるので，やはり $S_A=S_B$ が成り立つ．

(iii) 結果のまとめと解釈

最終的に得られたエンタングルメント・エントロピーの増加分 ΔS_A の一例を図 9.9 にプロットした．まず $l>\alpha$ の場合にエンタングルメント・エントロ

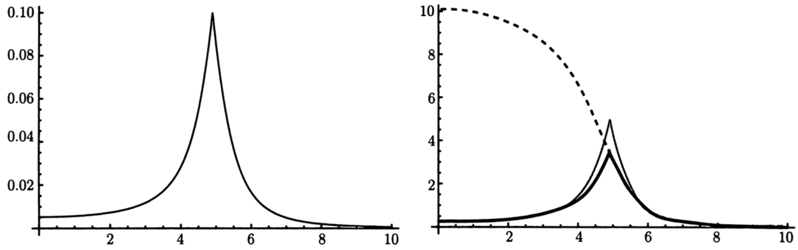


図 9.9 ΔS_A を時間 $t(>0)$ の関数としてプロットしたもの．左図と右図は それぞれ $M=0.1$ と $M=5$ に相当する（$R=\alpha=4G_N=1, l=5$ とおいた）．右図において，太い曲線が ΔS_A の厳密な値を表し，細い曲線は，M に関する 1 次の摂動のみ取り入れた場合の結果を表す．また点線は，BTZ ブラックホールの地平線をそのまま残した場合（混合状態として取り扱った場合）の結果を表す．(文献 [91] より．)

ピーは，最初は単調増加し，$t \simeq \sqrt{l^2-\alpha^2}$ において最大値をとり，その後減少してゆくことが分かる．このピークの幅も α で見積もられる．ΔS_A がこのような振る舞いをする理由は，重力理論側では明らかで，AdS 時空中の粒子が γ_A を $t=\sqrt{l^2-\alpha^2}$ の時に通過し，このときにバックリアクションが最大になり面積も増加するからである．

この結果の共形場理論の立場での解釈は以下の通りである．幅 $2l$ の部分系 A の中心部が $t=0$ で励起されると，その励起は光速で中心部から外側に向けて伝わり，$t \simeq l$ で A と B の境界部分に達する．従ってその時に，エンタングルメントが最大になるわけである．α は励起のサイズなので，この単純化した見積りの誤差を与えるといえる．このように AdS/CFT 対応の結果を自然に理解することができる．

一方，$l \leq \alpha$ の場合はピークが消失し単調現象の関数となるが，その理由は以上の議論と同様に理解できるので詳しくは述べない．

さて，特に M が小さい場合は，M に関する摂動論を用いてコンパクトな表式を求めることができるので触れておく．結果のみを書くと

$$\Delta S_A = \frac{2Ml\alpha + M(l^2-\alpha^2-t^2)\arctan\left(\frac{2\alpha l}{t^2+\alpha^2-l^2}\right)}{8G_N l R\alpha}, \tag{9.109}$$

となる．

どんな M にたいしても，十分時間が経過すると $(t \gg l)$，ΔS_A は必ず小さくなるので，上記の摂動論の結果を用いることができ，

$$\Delta S_A \simeq \frac{M\alpha^2 l^2}{3G_N R t^4}, \tag{9.110}$$

と振る舞うことが分かる．

また ΔS_A が最大値をとる $t=\sqrt{l^2-\alpha^2}$ における摂動論の値 (9.109) は，

$$\Delta S_A = \frac{M}{4G_N R} = 2E\alpha = 2mR \simeq 2\Delta, \tag{9.111}$$

となることも興味深い．ここで Δ は，重力理論において質量 m の粒子を第二量子化して得られる場に対応する演算子の共形次元である．但し，$mR \gg 1$ を仮定している．ΔS_A が励起に伴う情報量の増加分を表すので，(9.111) の最初の等号は

$$[A\,\text{内の情報量}] \sim [A\,\text{内のエネルギー}] \times [A\,\text{の大きさ}], \tag{9.112}$$

という関係式と解釈することもでき，式 (9.74) のように熱力学第一法則に類似した性質と言える．また (9.111) の最後の等号から，A の内部含まれる状態数は $e^{2\Delta}$ 程度であるという見積もりも得られる．

9.6.5　一般的な部分系 A の場合

部分系 A が任意の線分 $l^{(1)} \leq x_1 \leq l^{(2)}$ で与えられる場合でも厳密な計算が可能である．γ_A は，$(x,t,z) = (l^{(i)}, t, z_\infty)$　$(i=1,2)$ の 2 点をつなぐ測地線として定義される．(9.92) の座標で表すと $(\tau,\theta,r) = (\tau_\infty^{(i)}, \theta_\infty^{(i)}, r_\infty^{(i)})$ と表すことができる．両者の関係は，

$$\begin{aligned}
\tan\tau_\infty^{(i)} &= \frac{2Rt}{R^2 e^{\beta} + e^{-\beta}((l^{(i)})^2 - t^2)}, \\
\tan\theta_\infty^{(i)} &= -\frac{2Rl^{(i)}}{e^{-\beta}((l^{(i)})^2 - t^2) - R^2 e^{\beta}}, \\
r_\infty^{(i)} &= \frac{1}{z_\infty}\sqrt{R^2(l^{(i)})^2 + \frac{1}{4}\left(e^{-\beta}((l^{(i)})^2 - t^2) - R^2 e^{\beta}\right)^2}
\end{aligned} \tag{9.113}$$

で与えられる．ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A = \frac{R}{4G_N}\sum_{i=1}^{2}\left[\int_{r_*}^{r_\infty^{(i)}} dr \frac{Br}{\sqrt{A^2r^2 + (B^2r^2-1)(r^2+R^2-M)}}\right]. \tag{9.114}$$

と求められる．

(9.103) を積分することで

$$\begin{aligned}
&|\tau_\infty^{(2)} - \tau_\infty^{(1)}| = \\
&\frac{R}{\sqrt{R^2-M}}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{B^2(M-R^2)+A^2-1}{\sqrt{(B^2(R^2-M)+A^2-1)^2 + 4B^2(R^2-M)}}\right)\right], \\
&|\theta_\infty^{(2)} - \theta_\infty^{(1)}| = \\
&\frac{R}{\sqrt{R^2-M}}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{B^2(R^2-M)+A^2-1}{\sqrt{(B^2(R^2-M)+A^2-1)^2 + 4B^2(R^2-M)}}\right)\right],
\end{aligned} \tag{9.115}$$

を得る．

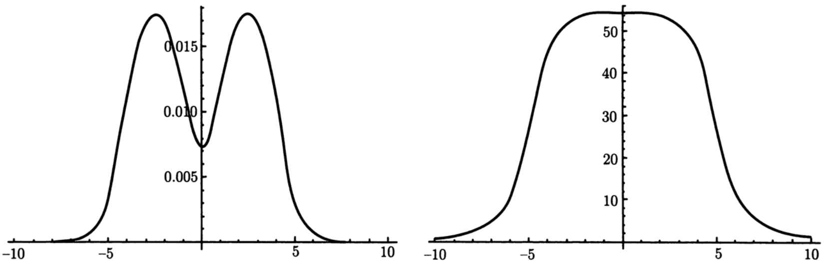


図 9.10 部分系 A を $(l^{(1)}, l^{(2)}) = (0, 5)$ に選んだ場合に，ΔS_A を時間 t の関数としてプロットした．左図と右図はそれぞれ $M = 0.01$ と $M = 500$ に相当する（$R = \alpha = 4G_N = 1$ とおいた）．（文献 [91] より．）

$0 < |\theta_\infty^{(2)} - \theta_\infty^{(1)}| < \pi$ の場合には，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A = \frac{R}{4G_N} \times \left[\log(r_\infty^{(1)} r_\infty^{(2)}) + \log \frac{2\cos\left[\frac{\sqrt{R^2-M}|\tau_\infty^{(2)} - \tau_\infty^{(1)}|}{R}\right] - 2\cos\left[\frac{\sqrt{R^2-M}|\theta_\infty^{(2)} - \theta_\infty^{(1)}|}{R}\right]}{R^2 - M}\right], \tag{9.116}$$

と計算される．また $\Delta\theta_\infty = |\theta_\infty^{(2)} - \theta_\infty^{(1)}| > \pi$ の場合は，$\Delta\theta_\infty \to 2\pi - \Delta\theta_\infty$ という置き換えをすることで結果が得られる．

特に，部分系 A の端点を励起する場合：$(l^{(1)}, l^{(2)}) = (0, l)$ を詳しく見てみよう．ΔS_A をいくつかの場合について図 9.10 にプロットした．この結果からわかるように $-l < t < l$ の範囲において ΔS_A は非自明になる．M が大きくなるにつれて $-l < t < l$ に台をもつ階段関数に近づく．$t \to \infty$ で ΔS_A はゼロに近づく．

AdS/CFT 対応の重力理論側からは，AdS 時空において落下する粒子が γ_A から徐々に遠ざかる事実から理解できる．共形場理論の観点からは，$t = 0$ において $x_1 = 0$ に局在した励起が光速で左右に伝播する描像から理解できる．$t = 0$ で励起が広がるにつれて A と B のエンタングルメントは増加し最大値に達し，$t > l$ では，左右の励起のピークがともに領域 A の外に出るので ΔS_A は減少し，ゼロに近づく．

また，特に $l \gg t \gg \alpha$ の極限をとると，

$$\begin{aligned} &\tau_\infty^{(1)} \simeq \pi - \frac{2\alpha}{t}, \quad \tau_\infty^{(2)} \simeq \frac{2t\alpha}{l^2}, \\ &\theta_\infty^{(1)} = 0, \quad \theta_\infty^{(2)} \simeq \pi - \frac{2\alpha}{l}, \\ &r_\infty^{(1)} \simeq \frac{Rt^2}{2\alpha z_\infty}, \quad r_\infty^{(2)} \simeq \frac{Rl^2}{2\alpha z_\infty}, \end{aligned} \tag{9.117}$$

となるので，エンタングルメント・エントロピーは，

$$S_A \simeq \frac{c}{3}\log\frac{l}{z_\infty} + \frac{c}{6}\log\frac{t}{\alpha} + \frac{c}{6}\log\left(\frac{R}{\sqrt{R^2-M}}\sin\left(\frac{\pi\sqrt{R^2-M}}{R}\right)\right),$$

と振る舞うことも分かる．このように $\log t$ のように時間とともに増加するのは局所クエンチに共通の性質である．

上記の模型は，無限に伸びている 1 次元空間の 1 点を励起した場合を記述すること既には述べたとおりである．一方で，半直線上に定義されている共形場理論を 2 つ考え，それぞれの端点をある時刻につなぐことでも，局所的に励起された状態を実現できる．このような局所量子クエンチは論文 [92] において共形場理論の立場から詳しく解析されている．この局所量子クエンチの AdS/CFT 対応は文献 [94] で与えられている．具体的には，前述の模型において AdS 時空を落下する物体（粒子）を考えたが，その物体の中心部分を取り除き，境界で置き換えることに相当する．

第 10 章
強結合量子系への応用

この章では，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを実際の物理系にどのように応用するのか具体例をいくつか説明したい．特に，ゲージ理論の閉じ込め・非閉じ込め相転移や金属のようにフェルミ面を持つ物質のAdS/CFT 対応を用いた解析について述べたい．AdS/CFT 対応の古典重力近似を用いるので，どちらの場合も量子系の強結合極限に相当する．

10.1 閉じ込め・非閉じ込め相転移

以前に 3.4 節でも触れたように，エンタングルメント・エントロピーは量子多体系の相構造における秩序変数（オーダーパラメーター）として機能する．AdS/CFT 対応の記述するゲージ理論において，最も基本的な相転移の一つとしては，閉じ込め・非閉じ込めの相転移が挙げられる．例えば，QCD のようなヤン・ミルズ・ゲージ理論（非可換ゲージ理論）では，ゲージ理論の相互作用（強い相互作用）のために，グルーオンやクォークといったカラー電荷をもった粒子が強く引き付けられ，全体として電荷がゼロの束縛状態（メソンやバリオン）を作る．このようにカラー電荷を帯びた粒子を単体で取り出せない状況を**閉じ込め**と呼ぶ．しかしながら，温度を高くして，十分高いエネルギーを与えると，束縛状態をバラバラにして，単体の粒子が自由に動き回れるようになる．このとき閉じ込めから解放された状態（非閉じ込め）と言う．この相転移が，閉じ込め・非閉じ込めの相転移である．

通常は，温度を変えながら何らかの物理量，例えばクォーク間の引力の強さを表すウィルソン・ループの期待値を計算することで相転移を判定する．しかしながら，エンタングルメント・エントロピーに着目した場合は，部分系の大きさ l を有効的な温度と解釈できるので，絶対零度の状態（波動関数）だけの情報から，l を変えることで相転移現象を解析することができる．以下では，このような計算を AdS/CFT 対応を用いて行う手法を解説したい[24],[95]．

まず，閉じ込め状態にあるゲージ理論に AdS/CFT 対応を通して対応する重力解はどのようなものか説明したい．一般に，質量ギャップ M があるということは，図 6.1 で表された AdS 時空からその赤外領域（z が大体 $1/M$ より大きい領域）を取り除いたような時空に相当する．その一つの簡単な模型が，**AdS ソリトン**と呼ばれる時空である．この時空は，AdS ブラックホール解を 2 回ウィック回転することで得られる．つまり AdS シュワルツシルド・ブラックホール解 (6.35) に対して，

$$t \to i\chi, \quad x_d \to it, \tag{10.1}$$

という座標変換を行えばよい．便宜上，さらに $r = R^2/z$ と定義すると，AdS_5 ソリトン $(d = 3)$ の計量は以下のように表される：

$$ds^2 = R^2 \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + f(r)d\chi^2 + dx_1^2 + dx_2^2) \ , \tag{10.2}$$

ここで $f(r) = 1 - r_0^4/r^4$ と定義した．r_0 は自由にとれるパラメーターであり，計量に特異点がないことを要求することで，χ 方向の周期が $L = \pi R^2/r_0$ と決められる．

この時空の境界は，$\mathbf{R}^{1,2} \times \mathbf{S}^1$ で与えられるので，タイプ IIB 超弦理論をこの時空と $\mathbf{S}^5$ の直積で与えられる 10 次元時空において定義すると，AdS/CFT 対応を通して対応するゲージ理論は，$\mathbf{R}^{1,2} \times \mathbf{S}^1$ 上に存在する 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称性ゲージ理論ということになる．この円周 $\mathbf{S}^1$ の方向の半径が十分小さいと思うと，有効的に $2+1$ 次元のゲージ理論とも解釈できる．計量 (10.2) を詳しく調べると，フェルミオンは $\mathbf{S}^1$ 方向を一周すると符号が変わるという反周期的な境界条件が課され，質量を持つことが分かる．このコンパクト化によって超対称性は破れる．さらにゲージ理論の量子効果で，スカラー場も質量を持つことが分かるので，結果として，ゲージ場のみ無質量のまま残る．このように 5 次元 AdS ソリトン解 (10.2) は，近似的に $2+1$ 次元の純粋なゲージ理論と解釈できる [63]．ここで「純粋な (pure)」の意味は，ゲージ場のみ存在し物質場が存在しないことを意味する．このようなゲージ理論では，β 関数が負になり，閉じ込めが起こることが良く知られている．実際に (10.2) の計量も，$r > r_0$ のみに時空が存在することから，赤外領域がカットされており，前述の一般的性質と一致する．

さてそれではこの AdS ソリトン時空においてホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを計算してみよう．計算の都合上，部分系 A は幅 l の帯状領域として，$-l/2 \leq x_1 \leq l/2$ で定義する．A は，χ と x_2 の方向には広がっているとする（x_2 の方向の長さを V とする）．このとき，∂A に相当する 2 つの平面を境界とする極小曲面 γ_A を探すことになるが，これには 2 つの候補がある．一つは，AdS 時空の時のように 2 つの平面 $x_1 = \pm l/2$ をつなぐ連結した曲面 $\gamma_A^{(con)}$ で，もうひとつは，それぞれの平面から伸びて，$r = r_0$ で終

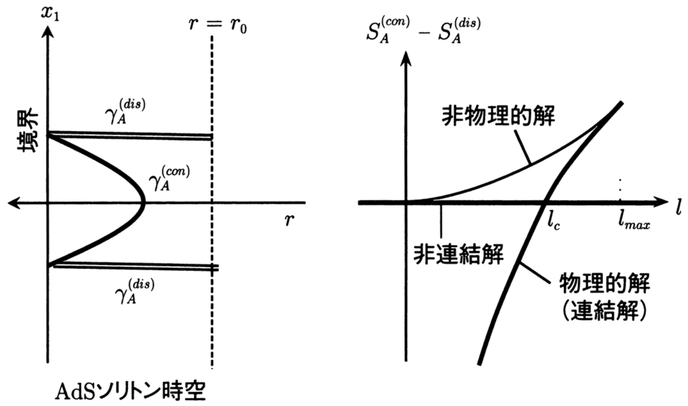


図 10.1　AdS ソリトン時空における 2 種類の極小曲面（左図）．それをもとに計算した S_A の振る舞いのスケッチ（右図）．

わる 2 つの非連結な平面 $\gamma_A^{(dis)}$ である．図 10.1 の左図を参照されたい．前者の連結した曲面 $\gamma_A^{(con)}$ は，幅 l がある値 l_{max} よりも小さい時のみに存在する．後者は単純に $x_1 = \pm l/2$ で与えられる平面なので，任意の l に対して存在する．以下で見るようにこの両者が競合することで相転移現象が現れるのである．

連結した曲面 $\gamma_A^{(con)}$ の形 $r = r(x_1)$ を求めるには，面積汎関数

$$\text{面積} = LV \int_{-l/2}^{l/2} dx_1 \frac{r}{R} \sqrt{\left(\frac{dr}{dx_1}\right)^2 + \frac{r^4 f(r)}{R^4}} \ , \tag{10.3}$$

を最小にすればよい．x_1 を時間と思うとハミルトニアンが保存するので，

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{f(r) \left(\frac{r^6 f(r)}{r_*^6 f(r_*)} - 1\right)} \ , \tag{10.4}$$

が得られる．ここで，r_* は r の最小値である．この式を積分することで，

$$\frac{l}{2} = \int_{r_*}^{r_\infty} dr \frac{R^2}{r^2 \sqrt{f(r) \left(\frac{r^6 f(r)}{r_*^6 f(r_*)} - 1\right)}} \ , \tag{10.5}$$

を得るが，これは r_* と l の関係を表す．ここで，紫外カットオフ $r = r_\infty (= \frac{R^2}{\epsilon})$ を導入した．最終的に，S_A は以下のように表される：

$$S_A^{(con)} = \frac{LV}{2RG_N^{(5)}} \int_{r_*}^{r_\infty} \frac{r^4 \sqrt{f(r)}}{\sqrt{r^6 f(r) - r_*^6 f(r_*)}} \ . \tag{10.6}$$

関係式 (10.5) から，l に最大値 l_{max}

$$l \leq l_{max} \simeq 0.22L \ , \tag{10.7}$$

が存在することが分かる．

また，非連結な平面 $\gamma_A^{(dis)}$ に対するエンタングルメント・エントロピーは，

以下のように計算される：

$$S_A^{(dis)} = \frac{VL}{2G_N^{(5)}} \int_{r_0}^{r_\infty} dr \frac{r}{R} = \frac{VL}{4G_N^{(5)} R}(r_\infty^2 - r_0^2) \ . \tag{10.8}$$

この式から明らかなように，l には依存しない定数となる．

図 10.1 の右図に，両者の振る舞いをスケッチした（$S_A^{(dis)}$ の寄与を差し引いている）．$l(< l_{max})$ を固定した時に連結した曲面には 2 種類あるが，常に面積が小さい方を選ぶことは前に説明した通りである．実際，面積が大きいほうの解をとると，S_A が下に凸な関数であり，強劣加法性に反することがすぐにわかる．逆に，面積が小さいほうの解は下に凹な関数となっている．

連結した曲面 $\gamma_A^{(con)}$ と非連結な平面 $\gamma_A^{(dis)}$ が競合するが，面積がより小さい方を選ぶ必要がある．両者の面積は，l がある値 $l_c \simeq 0.2L$ の時に等しくなる．従って，$l < l_c$ の場合は前者，$l > l_c$ に場合は後者が選ばれる．従って，$l = l_c$ で相転移に類似した現象を見出すことができるのである [24], [95]．この点で，S_A の l での微分は非連続的になっている．

この現象は，**閉じ込め・非閉じ込め相転移**と解釈することができる．l が小さい時は有効的なエネルギースケールが高く，非閉じ込め相の情報が得られると期待される．実際に $S_A^{(con)}$ は共形場理論と類似した振る舞い（$r_0 = 0$ の AdS 時空の計算結果と同じ）を示している．逆に l が大きい時は，低エネルギーの閉じ込め状態に相当すると予想されるが，$S^{(dis)}$ は確かに l に依存しないという自明な結果になり，カラー自由度 $O(N^2)$ に相応するダイナミカルな自由度が存在していないことが分かる．

このように AdS ソリトン解では，閉じ込め・非閉じ込め相転移をエンタングルメント・エントロピーの計算を通じて見出すことができた．同様の振る舞いは，閉じ込め状態を表す他の広く一般の模型でも見出すことができる [95]．まとめると，$d+1$ 次元の閉じ込め状態を記述する重力解について，エンタングルメント・エントロピーを計算すると，以下のような振る舞いを示すことができる：

$$\begin{aligned} &S_A(l)_{\text{有限}} = -V \cdot s(l) \ , \\ &s(l) \simeq c_1 N^2 l^{-(d-1)} \quad (l \to 0) \ , \\ &s(l) = c_2 N^2 \quad (l > l_c) \ . \end{aligned} \tag{10.9}$$

ここで $S_A(l)_{\text{有限}}$ は，発散項を差し引いたエンタングルメント・エントロピーを表す．V は，無限に伸びた $d-1$ 次元空間の体積を表し，$c_{1,2}$ や l_c は模型の詳細に依存する数値的な正の定数である．

以上は，AdS/CFT 対応を用いたホログラフィックな解析であるが，場の理論を用いて以上の結果を検証しようとすると閉じ込め状態の解析が必要になるので大変困難である．しかしながら，格子ゲージ理論を用いたエンタングルメント・エントロピーの数値計算の結果 [96] が得られているので紹介したい．これは，$3+1$ 次元ゲージ理論を $SU(3)$ のゲージ群の場合に計算したものであり，

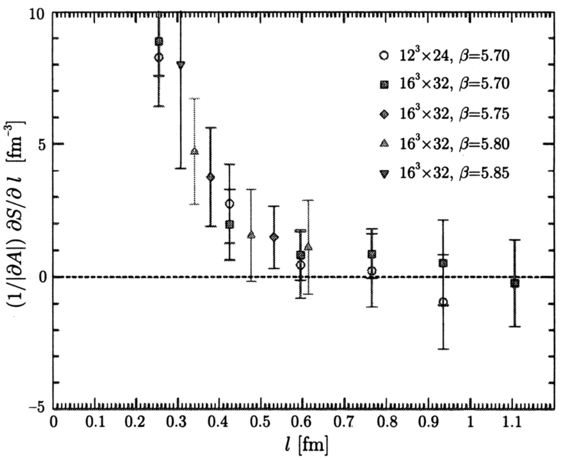


図 10.2 格子ゲージ理論におけるエンタングルメント・エントロピーの振る舞い．縦軸は $\frac{\partial S}{\partial l}$ を A の境界 ∂A の面積で割ったもの，横軸は l を表す．（文献 [96] より．）

図 10.2 に S_A を l で微分したものを図示した．このようにゲージ群 N が有限の場合は，$\frac{\partial S_A}{\partial l}$ は l の連続関数であり明確な跳び，すなわち相転移は生じていないように見える．しかしながら，図 10.2 の $l \sim 0.6$ fm 付近で，急激に値がゼロになる現象が見られることが分かる．この振る舞いが AdS/CFT 対応で考えているラージ N 極限で強められ，(10.9) のように $\frac{\partial S_A}{\partial l}$ が不連続になると思われる．

10.2 エンタングルメント・エントロピーとフェルミ面の物理

もうひとつのエンタングルメント・エントロピーの応用例として，強結合理論におけるフェルミ面の解析を説明したい．日常よく目にする物質である金属を特徴づけるのは**フェルミ面**の存在である．電子はフェルミオンなので，パウリの排他律に従い，各エネルギー準位を占有できるのはスピンの自由度を考慮して 2 つの電子だけである．従って，エネルギーの下の方から順に詰まって行って，あるエネルギー（フェルミエネルギー）で止まる．運動量空間において，この最大のエネルギーを持つ点の集合からなる曲面がフェルミ面である．フェルミオンは，クーロン力などの相互作用をするが，通常の金属では，有効質量などの値を適当に変化させることで，相互作用を低エネルギーで無視することができる [97], [98]．これが**ランダウのフェルミ液体**である．

しかしながら，**異常金属**や**非フェルミ液体**と呼ばれるクラスの特殊な金属では，フェルミオンにボソン的な自由度が強く相互作用しており，相互作用を低エネルギーで無視することができなくなる．このような系では摂動論は良い記

述を与えないので，非摂動論的な手法が必要になる．そこで AdS/CFT 対応の出番となる．このように AdS/CFT 対応を強結合（強相関）量子凝縮系に応用しようという分野は，AdS/CMT 対応 (AdS/condensed matter theory) などと最近呼ばれている（専門的なレビューとして文献 [99]〜[101] を，また日本語書かれたより平易なレビューとして文献 [102], [103] を参照されたい）．以下では，エンタングルメント・エントロピーを用いたフェルミ面の特徴付けを用いて，AdS/CFT 対応において実現可能なフェルミ面の性質を解析したい[104]．

10.2.1　フェルミ面が存在する場合のエンタングルメント・エントロピー

$d+1$ 次元時空 $\mathbf{R}^{1,d}$ における場の理論を考え，幅 l の帯状領域 A に対してエンタングルメント・エントロピー S_A を考える．$d+1$ 次元座標を $(t, x_1, \cdots, x_d)$ とする．部分系 A は，

$$A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d)| -\frac{l}{2} \leq x_1 \leq \frac{l}{2}, \quad 0 \leq x_2, x_3, \cdots, x_d \leq L\}. \tag{10.10}$$

で定義する．共形場理論の基底状態に対しては，(4.116) の結果になることは以前説明した通りである．ここでは，共形場理論にフェルミ面がある場合に S_A がどのように振る舞うかを計算したい．共形場理論の分散関係は $E = |k|$ であるので（ここでフェルミ速度を 1 としている），フェルミ面上のエネルギーと運動量は同じ値をとり，これを k_F と書くことになる．結論を先に言うと，$lk_F \gg 1$ の場合にフェルミ面が存在する場合に S_A は以下の式で与えられる：

$$S_A = (\text{定数}) \cdot \frac{L^{d-1}}{\epsilon^{d-1}} + \eta \cdot L^{d-1} k_F^{d-1} \log(lk_F) + O(l^0). \tag{10.11}$$

ここで η は，ある正の数値定数である．最初の発散項は面積則の発散に対応する．

この式の導出を説明する前に，物性物理の文献に見られる表記との関係に触れたい．物性物理で扱う金属の多くは，各格子点（原子の点）に数個の電子が存在するのが普通なので，フェルミ運動量 k_F は，格子間隔（紫外カットオフ）ϵ の逆数程度になっている．従って，(10.11) の最初の項よりも 2 番目の項が大きくなり，特に $L \sim l$ の場合（A が帯状ではなく，球体状の場合など) は，

$$S_A = (\text{定数}) \cdot \hat{L}^{d-1} \log \hat{L} + \cdots, \tag{10.12}$$

のように振る舞う．ここで $\hat{L} \equiv L/\epsilon$ は ∂A の格子点の数を表すとした．この (10.12) は，ハミルトニアンがフェルミオンの 2 次式で与えられ，近接相互作用する格子状の量子系に対して証明されている[105]．また，非自明に相互作用する系の一例としてスピン液体相とよばれる状態があるが，このような強結合系でも (10.12) が成り立っているということも知られている[106]．このように，フェルミ液体か非フェルミ液体かにかかわらずに，普遍的に (10.11) が成り立つと期待される．

さて，(10.11) の振る舞いを自由場理論の場合に説明しよう．$d+1$ 次元の自由フェルミオン場を考え，$(x_1,\cdots,x_d)$ の d 次元空間における半径 L のトーラスにコンパクト化する．従って，運動量は，

$$k_i = \frac{n_i}{L}, \quad (i=1,2,\cdots,d), \tag{10.13}$$

と量子化される．フェルミ面を有する基底状態は，以下で与えられる：

$$|\Psi\rangle = \prod_{|k|<k_F} b^\dagger_{n_1,n_2,\cdots,n_d}|0\rangle. \tag{10.14}$$

この時，$\vec{n} \equiv (n_2, n_3, \cdots, n_d)$ を独立なセクターのラベルだとみなすと，それぞれの $\vec{n}$ に対して，$1+1$ 次元の有質量フェルミオンの系として扱うことができる．この 2 次元の記述においてフェルミ運動量は $k_1 = \sqrt{k_F^2 - \vec{k}^2}$ で与えられ，質量は $m = |\vec{k}|$ となる．密度行列は各 $\vec{n}$ ごとの直積になるので，$d+1$ 次元の理論のエンタングルメント・エントロピー $S_A^{(d+1)}$ は，$1+1$ 次元のエントロピー $S_A^{(1+1)}$ の和として以下のように与えられる：

$$S_A^{(d+1)} = \sum_{\vec{n}} S_A^{(1+1)}(\vec{n}). \tag{10.15}$$

$|\vec{k}| > k_F$ の場合は，フェルミ面が存在しないので，$S_A^{(1+1)}(\vec{n})$ は，2 次元場の理論の結果 (4.83) や (4.66) を用いて評価できるので

$$\begin{aligned} S_A^{(1+1)} &\sim \log(l/\epsilon) \quad (lm \ll 1), \\ S_A^{(1+1)} &\sim -\log(m\epsilon) \quad (lm \gg 1), \end{aligned} \tag{10.16}$$

と見積もることができる．ここで $O(1)$ の係数は無視していることに注意．今は $l \gg \frac{1}{k_F}$ の場合に興味があるので，$|\vec{k}| > k_F$ の場合は，

$$S_A^{(1+1)}(\vec{n}) \sim -\log(|\vec{k}|\epsilon), \tag{10.17}$$

となる．

さて，$|\vec{k}| < k_F$ の場合は，2 次元場の理論にフェルミ面が存在する．分散関係に注目すると

$$\begin{aligned} E_k &= \sqrt{|\vec{k}|^2 + \left(\sqrt{k_F^2 - |\vec{k}|^2} + \delta k_1\right)^2} \\ &\simeq k_F + \frac{\sqrt{k_F^2 - |\vec{k}|^2}}{k_F}\delta k_1. \end{aligned} \tag{10.18}$$

従って，フェルミ面近傍 $\delta k_1 \ll k_F$ では，無質量フェルミオンのように振る舞うことが分かる．従って，$S_A^{(1+1)} \sim \log(l/\epsilon)$ と評価できる．

このようにして，$S_A^{(d+1)}$ を次のように評価できる：

$$S_A^{(d+1)} \sim L^{d-1}\int_{k_F<|\vec{k}|<\epsilon^{-1}} d^{d-1}kS_A^{(1+1)} + L^{d-1}\int_{|\vec{k}|<k_F} d^{d-1}kS_A^{(1+1)},$$
$$\sim -L^{d-1}\int_{k_F<|\vec{k}|<\epsilon^{-1}} d^{d-1}k\log(\epsilon|\vec{k}|) + L^{d-1}\int_{|\vec{k}|<k_F} d^{d-1}k\log(l/\epsilon). \tag{10.19}$$

式 (10.19) の最初と 2 つ目の項は，それぞれ

$$-L^{d-1}\int_{k_F<|\vec{k}|<\epsilon^{-1}} d^{d-1}k\log(\epsilon|\vec{k}|) \sim \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} + \cdots, \tag{10.20}$$

と

$$L^{d-1}\int_{|\vec{k}|<k_F} d^{d-1}k\log(l/\epsilon) \sim L^{d-1}k_F^{d-1}\log(l/\epsilon), \tag{10.21}$$

と見積もられる．

この (10.20) と (10.21) を (10.19) に代入することで，確かに (10.11) を導出できたことになる．ここで，(10.20) と (10.21) に含まれる $O(\log\epsilon)$ の発散項は，うまく相殺していることに注意．

以上のフェルミ面が存在する系におけるエンタングルメント・エントロピーの計算で本質的であった点は，フェルミ面近傍の励起をフェルミ面に垂直方向 $\delta k_\perp$ とそれ以外 $\delta k_\parallel$ に分けると，$\delta E \sim \delta k_\perp + (\delta k_\parallel)^2$ のようになっていることである．低エネルギーでは $\delta k_\perp$ の励起のみを考えると，2 次元共形場理論と同じである．また，$\delta k_\parallel$ 方向の励起は，ハミルトニアンの値をほとんど変化させないので，ヒルベルト空間を

$$\mathcal{H}_{tot}^{d+1} \simeq \otimes_{k_\parallel} \mathcal{H}_{k_\parallel}^{1+1} \tag{10.22}$$

のように分けると，$\mathcal{H}_{k_\parallel}^{1+1}$ は低エネルギーにおいては，それぞれ互いに独立であるようにみなせる．従って，フェルミ面のある系の低エネルギー極限は，無限個の 2 次元共形場理論の集合とみなせるのである．それぞれの 2 次元共形場理論のエントロピーは log 的に振る舞うことは既に (4.66) のように知っているので，結果として，(10.11) の log の項が導かれるのである．

10.2.2　ホログラフィックな解析の一般論

それでは，AdS/CFT 対応を用いたホログラフィックな解析に移ろう．以下の解析は何次元でも可能であるが，特に $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$ の場合について行うことにする．その理由の一つは，$2+1$ 次元量子系では相互作用が強くなる傾向があり，非フェルミ液体が実現される物質の例（高温超伝導体や重いフェルミオン系など）が複数知られているからである．

並進対称性や回転対称性を仮定すると一般的な 4 次元計量は，以下の形に書ける：

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + dx^2 + dy^2\right). \tag{10.23}$$

ここで，$f(z)$ と $g(z)$ は任意の関数である．特に $f(z) = g(z) = 1$ とすると，AdS_4 時空になる．g_{tz} の計量成分は座標変換で取り除けることに注意．漸近的に AdS な時空を仮定するので，境界 $z=0$ 付近では，

$$f(z) = g(z) \simeq 1, \tag{10.24}$$

であるとする．

この背景 (10.23) に対してホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーを計算したい．部分系 A は，幅 l の帯状領域として，以下で与えられる：

$$A = \{(x,y)| -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad 0 \leq y \leq L\}. \tag{10.25}$$

対応する極小曲面 γ_A は，$x = x(z)$ と表すことができる．

この曲面の面積は，

$$\text{面積} = 2R^2 L \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z^2}\sqrt{g(z) + x'(z)^2}, \tag{10.26}$$

で与えられる．ここで，z_* は，曲面状でとりうる z の最大値であり，$x'(z_*)$ は発散する．保存量に着目すると，

$$x'(z) = \frac{z^2}{z_*^2}\sqrt{\frac{g(z)}{1-\frac{z^4}{z_*^4}}}, \tag{10.27}$$

を満たすことが分かる．

幅 l は z_* を用いて，以下にように与えられる：

$$l = 2\int_0^{z_*} dz \frac{z^2}{z_*^2}\sqrt{\frac{g(z)}{1-\frac{z^4}{z_*^4}}}. \tag{10.28}$$

最終的に，面積 (10.26) は，

$$\text{面積} = 2R^2 L \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z^2}\sqrt{\frac{g(z)}{1-\frac{z^4}{z_*^4}}}, \tag{10.29}$$

と求められる．

特に，$g(z)$ の形を

$$\begin{aligned} g(z) &\simeq \left(\frac{z}{z_F}\right)^{2n} \quad (z \gg z_F), \\ g(z) &\simeq 1 \qquad (z \ll z_F), \end{aligned} \tag{10.30}$$

のように仮定してみる．z_F は，時空が AdS 時空から大きくずれ始める点を表し，後でフェルミエネルギーのスケールと同一視する量である．従って，

$$z_* \gg z_F, \tag{10.31}$$

の場合を以下では考えることにする．

この時，(10.28) から

$$l \sim \frac{2}{z_*^2 z_F^n}\int^{z_*} dz \frac{z^{2+n}}{\sqrt{1-z^4/z_*^4}} \sim c_n \frac{z_*^{n+1}}{z_F^n}, \tag{10.32}$$

であることが分かる．ここで，c_n は正の定数である．

同様に面積は，

$$\begin{aligned}\text{面積} &\simeq \frac{2R^2L}{\epsilon}+\frac{2R^2L}{z_F^n}\int^{z_*} dz\frac{z^{n-2}}{\sqrt{1-z^4/z_*^4}}\\ &\simeq \frac{2R^2L}{\epsilon}+d_n\frac{R^2Lz_*^{n-1}}{z_F^n},\end{aligned} \tag{10.33}$$

のように評価できる．ここで d_n は正の定数である．

このようにして，$l \gg z_F$ の場合には，k_n を正の定数値として，

$$S_A \simeq \frac{R^2L}{2G_N\epsilon}+k_n\frac{R^2}{G_N}\frac{L}{z_F}\cdot\left(\frac{l}{z_F}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}, \tag{10.34}$$

と振る舞うことが分かる．右辺最初の項は面積則の発散項に相当する．第 2 項が今興味がある有限の寄与を与える項で，最大の場合 ($n \to \infty$) でも l に関して線形の関数である．これは，許される最大のエントロピーは，部分系 A のヒルベルト空間の次元の対数で与えられ，従って A の体積に比例するからである．この極限 $n \to \infty$ の典型例は，AdS ブラックホールの場合で，この時はエンタングルメント・エントロピーの有限項は示量的な量となる．

さて，ここで本来の目的であったフェルミ面の性質 (10.11) を思い出そう．このようにエンタングルメント・エントロピーが log 的に振る舞うことを条件にどのような計量が許されるか調べたい．このようにすることで，AdS/CFT 対応の重力解でフェルミ面を持つ理論に対応するものを全て分類することができるはずである．この性質を要求することで，$g(z)$ の振る舞い (10.30) は，$n=1$ に選ばれることが分かる．この場合は，

$$S_A \simeq \frac{R^2L}{2G_N\epsilon}+k_1\frac{R^2}{G_N}\frac{L}{z_F}\log\left(\frac{l}{z_F}\right), \tag{10.35}$$

となることが分かり，(10.11) と一致する．対応するゲージ理論のゲージ群を $SU(N)$ とすると， AdS/CFT 対応の古典重力近似の常として，S_A は $O(N^2)$ の量である．従って，N^2 個程度のフェルミ面が存在している状況と期待され，そのフェルミエネルギー（$\sim$フェルミ運動量 k_F）は，$1/z_F$ 程度と同定される．

今までは帯状領域 A に対して S_A を計算したが，A がより一般の場合については，A がサイズ l の有限領域だとすると $l \gg z_F$ の場合は，

$$S_A \simeq \gamma\cdot\frac{l}{\epsilon}+\tilde{\eta}\cdot lk_F\log(lk_F), \tag{10.36}$$

と振る舞うことも確認できる．

このように計量の (zz) 成分に比例する関数 $g(z)$ は，S_A がフェルミ面に特有の log 的な振る舞いをすることから決定することができた．では (tt) 成分に相当する $f(z)$ はどのように決めたらよいのだろうか．残念ながら $f(z)$ の関数形を決定することは無理であるが，満たすべき重要な条件を求めることはできる．

この条件は，**ヌル・エネルギー条件**と呼ばれ，重力理論が満たすべき基本的な性質である．具体的には，任意のヌル・ベクトル N^a に対して，エネルギー運動量テンソル T_{ab} が，

$$T_{ab}N^a N^b \geq 0, \tag{10.37}$$

を満たすことを要求する．大雑把に言うと，ゴーストのようなエネルギーがいくらでも負になるような場が存在しないことを意味し，物理系の安定性の条件とも言える．AdS/CFT 対応では，もしこの条件が破れると例えば c 定理が破れるなど，共形場理論のユニタリティーを破らないと起きないような現象が起こってしまう．従って，今のセットアップでもヌル・エネルギー条件は満たされるべきである．アインシュタイン方程式から $T_{ab} \propto R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ であり（宇宙定数も T_{ab} に含める），ヌルベクトルを

$$N^t = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}, \quad N^z = \frac{\cos\theta}{\sqrt{g(z)}}, \quad N^x = \sin\theta, \tag{10.38}$$

と選ぶと（θ は任意の定数），

$$\begin{aligned} T_{ab}N^a N^b \propto & -\frac{zg(z)f'(z)^2 + f(z)(zf'(z)g'(z) + g(z)(4f'(z) - 2zf''(z))}{4zf(z)^2 g(z)^2}\sin^2\theta \\ & -\frac{g(z)f'(z) + f(z)g'(z)}{zf(z)g(z)^2}\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{10.39}$$

となるので，ヌル・エネルギー条件は，

$$\begin{aligned} & g(z)f'(z) + f(z)g'(z) \leq 0, \\ & zg(z)f'(z)^2 + f(z)(zf'(z)g'(z) + g(z)(4f'(z) - 2zf''(z))) \leq 0, \end{aligned} \tag{10.40}$$

と書き表すことができる．

赤外領域 $z \gg z_F$ で，$f(z)$ と $g(z)$ が

$$f(z) \propto z^{-2m}, \quad g(z) \propto z^{2n}, \tag{10.41}$$

と振る舞うと仮定すると，ヌル・エネルギー条件 (10.40) から，

$$m \geq n, \tag{10.42}$$

が導かれる．

このようにして得られた条件の物理的意味を理解するために，**比熱**を計算してみよう．今まで考えてきた計量は，ゼロ温度つまり基底状態に相当する．そ

こでこの系を加熱して有限温度系にしたとすると，それに対応する重力解はブラックホール解となる．このようなブラックホール解は，(10.41) と (10.23) で与えられる解を以下のように変形した計量で与えられる

$$ds^2 = R^2 \left(-z^{-2(m+1)} h(z) dt^2 + z^{2(n-1)} \tilde{h}(z)^{-1} dz^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{z^2} \right). \tag{10.43}$$

ここで，$h(z)$ と $\tilde{h}(z)$ は理論の詳細に依存する関数であるが，ブラックホールの地平線の位置を $z = z_H$ とすると，$\frac{z}{z_H} \ll 1$ のときは，$h(z) \simeq \tilde{h}(z) \simeq 1$ となり，地平線近傍 $z \simeq z_H$ では，

$$h(z) \propto \tilde{h}(z) \propto \frac{z_H - z}{z_H}, \tag{10.44}$$

のように振る舞う．計量 (10.43) から温度 T は，$T \propto z_H^{-m-n-1}$ となることが分かり，熱力学的エントロピー S は，地平線の面積を計算することで

$$S \propto \frac{V_2}{z_H^2} \propto V_2 \cdot T^{\frac{2}{m+n+1}}, \tag{10.45}$$

と振る舞うことが分かる．ここで，V_2 は $\int dxdy$ の面積である．

以上より，比熱と温度の関係が以下のように求められる：

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} \propto T^{\frac{2}{m+n+1}}. \tag{10.46}$$

フェルミ面特有の性質から $n = 1$ が要請されることは，すでに説明したとおりであるので，ヌル・エネルギー条件から得られた不等式 (10.42) を用いると

$$C \propto T^{\alpha}, \quad \alpha \leq \frac{2}{3}, \tag{10.47}$$

であることが分かる．ちなみに同様の計算を $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ で行うと $\alpha \leq \frac{3}{5}$ が得られる．

この比熱の振る舞いに対する条件 (10.47) が，本節の最も重要な結果と言える．ランダウのフェルミ液体では，かならず比熱の温度依存性は線形つまり $\alpha = 1$ で与えられる．この事実は，フェルミ面近傍での低エネルギー励起が 2 次元共形場理論で与えられることを考慮すると，2 次元共形場理論の比熱は常に温度に比例するので説明できる．しかし，そうではない非フェルミ液体では，フェルミ面近傍の理論は非相対論的な分散関係 $E = |k|^z$ $(z \neq 1)$ を持っているので比熱の温度依存性は $\alpha = 1$ からずれることが知られている．今まで説明してきた AdS/CFT 対応の古典重力近似を用いた結果 (10.47) は，ランダウのフェルミ液体が実現できないことを意味している．この結果は**古典重力極限は，理論の強結合極限に相当するのでランダウのフェルミ液体ではなく，非フェルミ液体が得られる**ことを示唆しており興味深い．

この節の解析は，AdS/CFT 対応の古典重力極限を仮定して行っているので，

エンタングルメント・エントロピーの $O(N^2)$ の寄与のみを考慮していることになる．しかしながら，重力理論における 1 ループレベルの量子補正を考えると，フェルミオンがバルク（AdS 時空）に存在して，バルクでフェルミ面を持つような状況であれば，共形場理論にもフェルミオンが存在し，エンタングルメント・エントロピーの $O(1)$ の寄与は log 的に振る舞うことが示せる [107]．

10.2.3 具体的な模型

前節の解析で，AdS/CFT 対応におけるフェルミ面を持つ系の一般的な性質は明らかになった．しかし，具体的にはどのような重力理論を考えるとそのような系を得ることができるのだろうか．この問いに答えるために，(10.43) の計量を解として持つ重力理論の模型を紹介したい．この模型は，AdS/CFT 対応を用いて量子凝縮系の例を構成する際に基本となるものであり（例えば文献 [101], [108] を参照），次の作用で定義されるゲージ場とスカラー場が重力場と結合する理論で与えられる：

$$S = \frac{1}{16\pi G_N}\int\sqrt{-g}\left[(R-2\Lambda) - W(\phi)F^{ab}F_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - V(\phi)\right]. \tag{10.48}$$

ここで，$W(\phi)$ と $V(\phi)$ は，任意の関数であり，$\Lambda = -\frac{3}{R^2}$ は，負の宇宙定数である．$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ は $U(1)$ ゲージ場 A_a の場の強さである．

作用 (10.48) の計量の変分から導かれるアインシュタイン方程式は，

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = \\ -\frac{W(\phi)}{2}F^{cd}F_{cd}g_{ab} + 2W(\phi)F_a^cF_{bc} - \frac{1}{4}\partial_c\phi\partial^c\phi g_{ab} + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{1}{2}V(\phi)g_{ab}. \tag{10.49}$$

ゲージ場の運動方程式（マックスウエル方程式）は，

$$\partial_a\left(\sqrt{-g}W(\phi)F^{ab}\right) = 0, \tag{10.50}$$

となる．最後に，スカラー場の運動方程式は，

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}\partial^a\phi) - \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} - \frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}F^{ab}F_{ab} = 0, \tag{10.51}$$

と求められる．

計量としては，前と同様 (10.23) の形を仮定し，スカラー場 ϕ とゲージ場に関しては，

$$\phi = \phi(z), \quad A_t = a(z), \quad A_z = A_x = A_y = 0, \tag{10.52}$$

の形とする．この仮定のもとで，運動方程式 (10.49), (10.50), (10.51) の解を

探そう．

まず，マックスウエル方程式 (10.50) から，A を定数とすると

$$a'(z) = \frac{A}{W(\phi)}\sqrt{f(z)g(z)}, \tag{10.53}$$

と書けることが分かる．この定数 A は対応する量子凝縮系の電荷密度と解釈されることが分かる [99]．

アインシュタイン方程式 (10.49) とスカラー場の運動方程式は，以下のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{R^2}{z^2}f(z)\left(\Lambda + \frac{V(\phi)}{2}\right) + \frac{A^2z^2}{R^2W(\phi)}f(z) + \frac{f(z)}{4g(z)}\phi'(z)^2, \\ G_{zz} &= -\frac{R^2}{z^2}g(z)\left(\Lambda + \frac{V(\phi)}{2}\right) - \frac{A^2z^2}{R^2W(\phi)}g(z) + \frac{1}{4}\phi'(z)^2, \\ G_{xx} &= -\frac{R^2}{z^2}\left(\Lambda + \frac{V(\phi)}{2}\right) + \frac{A^2z^2}{R^2W(\phi)} - \frac{1}{4g(z)}\phi'(z)^2, \end{aligned} \tag{10.54}$$

$$\frac{z^4}{R^4\sqrt{f(z)g(z)}}\partial_z\left(\frac{R^2}{z^2}\sqrt{\frac{f(z)}{g(z)}}\partial_z\phi(z)\right) - \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} + \frac{2A^2z^4}{R^2W(\phi)^2}\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi} = 0. \tag{10.55}$$

ここで，$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ はアインシュタイン・テンソルであり，計量 (10.23) に対しては，

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -\frac{f(z)(3g(z) + zg'(z))}{z^2g(z)^2}, \\ G_{zz} &= \frac{3f(z) - zf'(z)}{z^2f(z)}, \\ G_{xx} &= -\frac{1}{4z^2f(z)^2g(z)^2}\Big[z^2g(z)f'(z)^2 - 4f(z)^2(3g(z) + zg'(z)) \\ &\qquad + zf(z)(zf'(z)g'(z) + g(z)(4f'(z) - 2zf''(z)))\Big], \end{aligned}$$

と計算される．両者が等しいことから，以下の関係式を得る：

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{4R^2f(z)^2g(z)^2}\Big[z^2g(z)f'(z)^2 + 4f(z)^2(-6g(z) + 6g(z)^2 - zg'(z)) \\ &\qquad + zf(z)(zf'(z)g'(z) + g(z)(8f'(z) - 2zf''(z)))\Big], \\ \frac{1}{W(\phi)} &= -\frac{R^2}{8A^2}\cdot\frac{zg(z)f'(z)^2 + f(z)(zf'(z)g'(z) + g(z)(4f'(z) - 2zf''(z))}{z^3f(z)^2g(z)^2}, \\ \phi'(z)^2 &= -\frac{2(g(z)f'(z) + f(z)g'(z))}{zf(z)g(z)}. \end{aligned} \tag{10.56}$$

これが満たされると，(10.55) も満足することが分かる．

まとめると，任意の $f(z)$ と $g(z)$ で表される計量に対して，上記のように $W(\phi), V(\phi), \phi(z)$ を選ぶと，それは運動方程式の解となるのである．しかしな

がら，物理的に許される解である条件：$W(\phi) \geq 0$ と $\phi'(z)^2 \geq 0$ は課す必要がある．これらの条件は，ヌル・エネルギー条件 (10.40) と等価である．

さて，エンタングルメント・エントロピーが (10.11) のように振る舞うような解を構成するために，

$$g(z) = \frac{z^2}{z_F^2}, \quad f(z) = kz^{-p}, \tag{10.57}$$

と仮定する（式 (10.41) において $p = 2m$ とおいた）．このとき $p > 2$ の場合の解を以下のように見つけることができる：

$$\phi(z) = \sqrt{2(p-2)}\log z, \tag{10.58}$$

$$V(\phi) = \frac{6}{R^2} - \frac{(32+12p+p^2)z_F^2}{4R^2z^2}, \tag{10.59}$$

$$W(\phi) = \frac{8A^2z^6}{z_F^2p(8+p)R^2}. \tag{10.60}$$

従って，ポテンシャル関数 $V(\phi)$ やゲージ場の運動項の係数 $W(\phi)$ を

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{6}{R^2} - \frac{(32+12p+p^2)z_F^2}{4R^2}e^{-\sqrt{\frac{2}{p-2}}\phi}, \\ W(\phi) &= \frac{8A^2}{z_F^2p(p+8)R^2}e^{\frac{6}{\sqrt{2(p-2)}}\phi}, \end{aligned} \tag{10.61}$$

と選べばよいことが分かる．

以上で構成した古典解は，$z \to \infty$ の極限（赤外極限）で特異的である．実際，この極限でディラトンが発散したり，計量が特異点を持つ．そこで，この問題を回避するために系を加熱して有限温度として，対応するブラックホール解を考えよう．ブラックホールにすると地平線の内側に特異点が隠れるので，この問題が解消するからである．

$V(\phi)$ と $W(\phi)$ は，先ほどと同じ (10.59) と (10.60) で与えられるとする．この時，つぎのようなブラックホール解を見つけることができる：

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{z^2}{z_F^2h(z)}, \\ f(z) &= k\cdot z^{-p}\cdot h(z), \\ \phi(z) &= \sqrt{2(p-2)}\log z. \end{aligned} \tag{10.62}$$

ここで，$h(z)$ は以下で定義される：

$$h(z) = 1 - M_{BH}\cdot z^{\frac{p+8}{2}}. \tag{10.63}$$

M_{BH} はブラックホールの質量に比例する任意パラメーターである． ブラックホールの地平線は，$h(z) = 0$ を満たす $z = z_H$ で与えられる．この場合に，比熱やエントロピーの温度依存性は，

$$C \propto S \propto \left(\frac{T}{z_F \sqrt{k}} \right)^{\frac{4}{p+4}}, \tag{10.64}$$

のように計算され，前の一般論 (10.46) と一致する．

10.2.4 ハイパースケーリングの破れ

計量 (10.23) において $f(z)$ と $g(z)$ が (10.41) のように z の冪で与えられるクラスの解は，シンプルなモデルとして興味深い．一般に $d+2$ 次元の計量に同様の性質を持つ解を次の形に書き変えることができる [109]：

$$ds^2 = \frac{1}{r^2} \left(r^{\frac{2\theta}{d-\theta}} dr^2 + \sum_{i=1}^{d} dx_i^2 - r^{-\frac{2d(z-1)}{d-\theta}} dt^2 \right). \tag{10.65}$$

この計量は以下の変換で不変になっていることが分かる：

$$x_i \to \lambda x_i, \quad t \to \lambda^z t, \quad ds \to \lambda^{\theta/d} ds. \tag{10.66}$$

つまり，空間を 1 次元としたときに時間が z 次元のように振る舞うという性質を表しており，z は**動的指数** (dynamical exponent) と呼ばれる．分散関係の言葉で言うとエネルギー E と運動量 p が $E = p^z$ の関係になることを意味し，どれだけ非相対論的かを示している．また，$\theta \neq 0$ の場合は，計量がスケール変換で不変にならない．このように θ は，スケール変換の対称性をどれだけ破るかを測る量であり，AdS/CFT 対応で双対な量子凝縮系の立場では**ハイパースケーリングの破れの指数**と解釈できる [109]．

特に AdS 時空では，$z = 1$ かつ $\theta = 0$ であるが，これは相対論的なスケール不変性の存在を意味している．また，$z \neq 0$ かつ $\theta = 0$ のような時空では，スケール不変性はあるが，非相対論的である．このような理論は**リフシッツ的な** (Lifshitz-like) **量子臨界点**とも呼ばれる [110]．

比熱やエントロピーを (10.65) の時空の赤外領域にブラックホールを導入することで計算すると，

$$C \propto S \propto T^{\frac{d-\theta}{z}}, \tag{10.67}$$

と振る舞うことが分かる．従って，d ではなく，$d - \theta$ が有効的な空間次元であることが分かる．このように，ハイパースケーリングの破れの指数 θ は，実効的な空間次元が d よりどれだけ小さく振る舞うかを表しているのである．

フェルミ面が存在する系の場合は，$\theta = d - 1$ に相当する．実際に，今まで解析した $d + 2 = 4$ 次元の計量 (10.41) において $n = 1$ がフェルミ面のある系に相当することは既に見たとおりだが，座標変換して (10.65) と比較すると確かに $\theta = 1$ が得られる．$\theta = d - 1$ は，有効空間次元が，$d - (d - 1) = 1$ 次元であることを意味するが，これはフェルミ面近傍の低エネルギー励起が 2 次元共形場理論（もしくはそれを非相対論的臨界点に拡張したもの）で記述されることを思い出すと納得できる．

第 11 章
おわりに：量子エンタングルメントから量子重力理論の再構築へ

この本書最後の章ではこれまでの内容を総括し，今後の展望について述べたい．量子エンタングルメントのホログラフィー原理に基づく解析を思い出すと，重力理論の時空はミクロなエンタングルメントの集合体とみなせることが示唆される．このアイデアを実現する一つの可能性が，テンソルネットワークと呼ばれる量子多体系の波動関数の記述であり，その中で特に「エンタングルメント繰りこみと呼ばれる枠組みと AdS/CFT 対応が実は等価である」という予想がなされている．そこでこれらの現在発展しつつある重力理論に対する新しい考え方を簡単に紹介して筆をおくことにしたい．

11.1　量子エンタングルメントと重力理論における時空の構造

これまでに本書では，量子多体系における量子エンタングルメントの解説を主目的として，その定量的な測度であるエンタングルメント・エントロピーの性質と計算法を解説してきた．エンタングルメント・エントロピーは，どのような量子多体系においても定義できる普遍的な物理量であり，系の自由度や相関を表す重要な量である．場の理論においてしばしば計算の対象となる相関関数は，時空の点を複数指定してそれらの間の局所的な相関を測る量であり，系が純粋状態なのか混合状態なのかという大域的な量子相関に関する識別を行うことはできない．一方，エンタングルメント・エントロピーには非局所的な情報も含まれ，量子状態のトポロジーという大域的な情報も解析することができる．

エンタングルメント・エントロピーの計算法には大きく分けて 2 種類あり，一つが場の理論の手法を用いる方法であり，もう一つが AdS/CFT 対応にもとづくホログラフィックな計算法である．特に後者においては，本来は量子論的に定義されたエンタングルメント・エントロピーを，曲がった時空における極小面積という微分幾何学的な量として計算することができる．このように AdS/CFT 対応は量子多体系の量子論的量を，重力理論の古典的量に結びつけるという画

期的な役割を果たす.

さて，$d+2$ 次元時空における重力理論に対するホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式 (7.1) において，重力定数 G_N がプランク長の d 乗 (l_p^d) の定数倍で与えられることから，d 次元の極小曲面を格子間隔がプランク長となるように格子で分割していった場合に，**単位格子あたり 1 ビットの量子エンタングルメントを持っている**計算になる．この極小曲面は任意にとることができ，時空のいたるところに存在する．このことから，重力理論の時空には，プランク長程度の大きさを持つエンタングルした対（例えばスピンの EPR ペアのようなもの）が無数分布しており，極小曲面 γ_A を一つ指定すると，γ_A と跨いでエンタングルするペアの数に相当するエンタングルメント・エントロピー S_A を勘定することになる：

$$
\begin{aligned}
S_A &\propto \mathrm{Min}_{\gamma_A} \frac{[\gamma_A\text{の面積}]}{l_p^d} \\
&\propto \mathrm{Min}_{\gamma_A} [\gamma_A\text{と交差するエンタングルメント対の数}] .
\end{aligned} \tag{11.1}
$$

ここで，γ_A は極小曲面であるので，無数にある曲面 γ_A の中でも最小値を選ぶ操作 Min_{γ_A} を挿入した.

このような視点で考えると，重力理論を**量子エンタングルメントの集合体**として記述できるのではないかと推測するのは自然なことであろう.

11.2 エンタングルメント繰りこみと AdS/CFT 対応

以上のようなアイデアを具体的に実現する可能性の一つがテンソルネットワークと呼ばれる手法である（詳しく知りたい読者は文献 [111], [112] などを参照）.

量子多体系では，与えられたハミルトニアンの基底状態波動関数を近似的・数値的に求めることが大変重要な課題となる．テンソルネットワークは，波動関数を変分法に従って効率よく構築する手法と考えることができる．例として，1 次元のスピン鎖を考え，その基底状態 $|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots} C_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots}|\sigma_1\sigma_2\cdots\rangle$ を計算したいとする．ここで，$\sigma_i = \uparrow, \downarrow$ は i 番目の格子点上のスピンの自由度を表し，$C_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots}$ が求めるべき波動関数である．**行列積状態** (Matrix Product State, MPS) では，$C_{\sigma_1,\sigma_2,\cdots}$ が行列の積で与えられると考える：

$$
|\Psi\rangle = \mathrm{Tr}\left[M(\sigma_1)M(\sigma_2)\cdots\right]|\sigma_1\sigma_2\cdots\rangle. \tag{11.2}
$$

ここで，行列 $M(\sigma)$ はサイズ χ の行列とし，χ は十分大きくとる．行列要素を最適化することにより，真の波動関数を非常によい近似で（あわよくば厳密に）得ることができると考えるのである．この行列積状態の構造を図示すると図 11.1 のようになる．このように波動関数を幾何学的に図示する手法を**テンソルネットワーク**と呼ぶ.

次に行列積状態は，どれだけ広いクラスの量子状態を表しうるかという問題

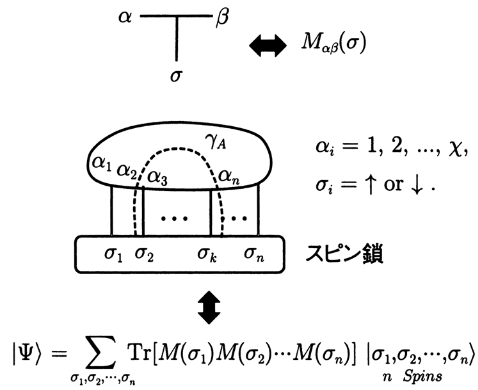


図 11.1 テンソルネットワークの一例：行列積状態とエンタングルメント・エントロピーの見積もり．

を考えよう．そこでエンタングルメント・エントロピーを調べることにする．行列積状態の 1 次元鎖を 2 領域 A と B に分け，エンタングルメント・エントロピーを見積もると，$S_A \leq 2\log\chi$ となる．このようになる理由は，図 11.1 に示したように，A と B をテンソルネットワーク内で分割する曲線 γ_A を描くと 2 点でそのグラフと交わり，各点のボンドは最大 $\log\chi$ のエントロピーを持つことができるからである．

一方，1 次元量子系の基底状態の波動関数では，質量ギャップがある限り，S_A は有限であることが証明されている（これは面積則の例である）．すなわち，行列積波動関数は，少なくともエンタングルメント・エントロピーの観点からは，任意のギャップがある系の基底状態の波動関数を表しうると考えられる．

では，ギャップのない系ではどのようなテンソルネットワークで記述することができるであろうか．その代表例は 1 次元のスピン鎖の量子臨界点として実現される $1+1$ 次元共形場理論である．この場合は，領域 A の長さを L とすると $S_A \propto \log L$ と振る舞い，L が大きいといくらでも大きくなるので，行列積状態とは異なるテンソルネットワークが必要である．

MERA (Multi Scale Entanglement Renormalization Ansatz) は，このような共形場理論の波動関数に対するテンソルネットワーク表示としてビダールによって考案されたもので，図 11.2 のような構造をしている [113]．この構成法は**エンタングルメント繰りこみ**と呼ばれる，量子系の実空間の繰りこみの手法に基づいている．

まず図 11.2 の下段 $m = 0$ に今考えているスピン鎖のスピンが並んでおり，その波動関数から出発する．もともとのスピンが N 個あったとすると，次の段 $m = 1$ では $N/2$ 個になり，その次 $m = 2$ では $N/4$ 個になるというように 2 つのスピンを 1 つのスピンに置き換えるという**粗視化**（数学的にはアイソメトリーと呼ばれる）を行って最終的に 1 つのスピンになるまで行う．これだけで

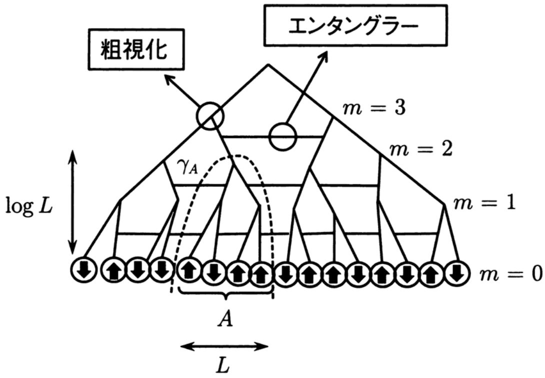


図 11.2 エンタングルメント繰りこみ (MERA) の概念図とエンタングルメント・エントロピーの見積もり.

は，S_A を見積もりを前述のように行うとすぐにわかるように，$S_A \propto \log L$ のような大きなエンタングルメントを実現できない．そこで，各粗視化のステップの直前に隣り合うスピン対に適当なユニタリー変換を行い，エンタングルメントを消去するという操作を行う．これを（ディス）**エンタングラー**と呼ぶ．逆に，図 11.2 を上から下へ読むことにすると，もともと一つであったスピンからスタートして，各ステップでスピンの数を 2 倍にし，かつエンタングルメントをエンタングラーの操作で加えて行き，最終的に今欲しいスピン鎖の基底状態を実現するという段取りになる．

このように MERA は共形場理論の状態を幾何学的に表現したものであるが，幾何学的な記述を実現するもう一つの枠組みである AdS/CFT 対応と実は等価であるという指摘がスウィングルによって最近なされた[114]．まず，図 11.2 のネットワークが，AdS_3 時空の時間一定面として実現する 2 次元の双曲面 $\mathbf{H}_2$ と類似していることに注目しよう．実際，第 6 章で説明したように AdS 時空 (6.6) の z 座標は，共形場理論において繰りこみ群の長さスケールに対応するが，MERA の場合にも同様で $z = \epsilon \cdot 2^m$ の関係にある．ここで ϵ はスピン鎖の格子間隔である．MERA の構造からスケール対称性も明らかである．

この MERA と AdS/CFT 対応の等価性に関してさらに非自明な根拠を与えるものがエンタングルメント・エントロピーの計算である．一般にテンソルネットワークによる波動関数の表示が与えられた時に，S_A は γ_A と交差するボンドの数に $\log \chi$ を掛けた値よりは小さくなるべきことが分かる．γ_A の選び方は無数あるのでその中でも最も厳しい上限値を得るには，特に交差数が最小となるものを取れば良い．十分にエンタングルメントが強い系では，S_A はその最小値で見積もることができると期待され，

$$S_A \sim \mathrm{Min}_{\gamma_A}[\gamma_A \text{と交差するボンドの数}] \cdot \log \chi, \qquad (11.3)$$

を得る．この S_A の見積もりを与える公式 (11.3) はホログラフィックな公式 (7.1) から得られる見積もり (11.1) と未決定の係数を除いて一致するのである．

特に 1 次元スピン鎖に対する MERA の場合に S_A を見積もると図 11.2 に図示されている γ_A とディスエンタングラーとの交差数を計算することで $S_A \propto \log L$ という見積もりを得ることができ，これは共形場理論で期待される結果を再現する．このように MERA は共形場理論に適したテンソルネットワークであることも確認できた．

以上のように，AdS/CFT 対応は実は MERA という枠組みと等価であるという強い証拠が得られた．さらにこの対応を用いて重力理論の時空の計量を，重力を含まない場の理論のみのデータから MERA の連続極限（cMERA と呼ばれる [115]）を用いて計算する方法も議論されている [116]．例えば，AdS 時空を励起して重力波が生じているような状態は，MERA では各ボンドのエンタングルメントの仕方が時間的に発展し，波のように伝播している状態として記述できる．このように重力のダイナミクスが量子エンタングルメントのダイナミクスとして解釈できることが理解できるが，このアイデアを用いて AdS/CFT 対応を超えたホログラフィー原理の理解を深めて行くことが今後の最も大きな課題といえよう．

参考文献

[1] J. D. Bekenstein, "Black holes and entropy", *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).

[2] S. W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes", *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).

[3] ブラックホールの熱力学に関しては，例えば次の教科書を参照のこと．R. M. Wald, "*General Relativity*", University of Chicago Press, 1984.
原論文は，以下のとおり．S. W. Hawking, "Black Holes and Thermodynamics", *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191.
G. W. Gibbons and S. W. Hawking, "Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity", *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.

[4] エンタングルメント・エントロピーやシャノンのエントロピーに関する日本語の本格的な教科書として，梅垣寿春・大矢雅則,『確率論的エントロピー』,『量子論的エントロピー』，共立出版.

[5] 日本語の短い解説として，高柳匡・笠真生，"エンタングルメント・エントロピーのホログラフィーを用いた幾何学的記述"，日本物理学会誌 **64** (2007) 421.

[6] 量子情報理論の世界的にスタンダードな教科書として, M. Nielsen and I. Chuang,"*Quantum Computation and Quantum Information*", Cambridge University Press.

[7] 林正人,『量子情報理論入門』，サイエンス社，SGC ライブラリ 32，臨時別冊・数理科学 2004 年 5 月.

[8] 堀田昌寛,『量子情報と時空の物理』，サイエンス社，SGC ライブラリ 103，臨時別冊・数理科学 2014 年 1 月.

[9] 原論文は，以下のとおり．L. Bombelli, R. K. Koul, J. H. Lee and R. D. Sorkin, "A Quantum Source Of Entropy For Black Holes", *Phys. Rev. D* **34**, 373 (1986).
M. Srednicki, "Entropy and area", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 666 (1993) [arXiv:hep-th/9303048].
これと類似したアイデア（ブリックウォールの方法と呼ばれる）は，すでにトフーフトが以下の論文で議論している．G. 't Hooft, "On the Quantum Structure of a Black Hole", *Nucl. Phys. B* **256** (1985) 727.

[10] L. Susskind and J. Uglum, "String physics and black holes", *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45B** (1996) 115 [hep-th/9511227].

[11] この話題の最新のレビューとして，S. N. Solodukhin, "Entanglement entropy of black holes", *Living Rev. Rel.* **14** (2011) 8 [arXiv:1104.3712 [hep-th]].

[12] 日本語の解説としては，高柳匡，"ホログラフィック理論とは何か？"， 数理科学 2007 月 12 月号 50 頁，サイエンス社.
英語のスタンダードなレビューとしては，D. Bigatti and L. Susskind, "TASI lectures on

the holographic principle", [arXiv:hep-th/0002044].
原論文は, G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity", [arXiv:gr-qc/9310026]; L. Susskind, "The World as a hologram", *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995) [arXiv:hep-th/9409089].

[13] 原論文は, J. Polchinski, "Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges", *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [hep-th/9510017].
超弦理論のスタンダードな教科書: J. Polchinski, "*String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*", Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p に詳しい解説がある.

[14] A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy", *Phys. Lett. B* **379** (1996) 99 [hep-th/9601029].

[15] 日本語の解説は, 高柳匡, "量子重力と共形場理論", 別冊・数理科学 2009 年 9 月号,『量子重力理論—広がる多彩な最前線』, サイエンス社.
英語のスタンダードなレビューは, O. Aharony et.al., *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111] を参照.
原論文は, J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [arXiv:hep-th/9711200].

[16] 原論文は, S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001]; *JHEP* **0608**, 045 (2006) [arXiv:hep-th/0605073].
英語で書かれた専門的レビューとして, T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic Entanglement Entropy: An Overview", *J. Phys. A* **42** (2009) 504008.
T. Takayanagi, "Entanglement Entropy from a Holographic Viewpoint", *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 153001 [arXiv:1204.2450 [gr-qc]].

[17] トポロジカル秩序の良い教科書は, X. G. Wen, "*Quantum Field Theory of Many-Body Systems*", Oxford University Press, (2004).

[18] A. Kitaev and J. Preskill, "Topological entanglement entropy", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110404 (2006) [arXiv:hep-th/0510092].
M. Levin and X. G. Wen, "Detecting topological order in a ground state wave function", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110405 (2006) [arXiv:cond-mat/0510613].

[19] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, "Quantum entanglement", *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865 [quant-ph/0702225].

[20] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, " A fundamental property of quantum-mechanical entropy", *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 434–436; " Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy", *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1938–1941. With an appendix by B. Simon.

[21] P. Calabrese and J. Cardy, "Entanglement entropy and quantum field theory", *J. Stat. Mech.* **0406**, P002 (2004) [arXiv:hep-th/0405152].

[22] 2 次元共形場理論のエンタングルメントエントロピーの計算に関する専門的なレビューは, P. Calabrese and J. Cardy, "Entanglement entropy and conformal field theory", *J. Phys.*

A **42** (2009) 504005 [arXiv:0905.4013 [cond-mat.stat-mech]].

[23] 自由場理論のエンタングルメントエントロピーの計算に関する専門的なレビューは，H. Casini and M. Huerta, "Entanglement entropy in free quantum field theory", *J. Phys. A* **42** (2009) 504007 [arXiv:0905.2562 [hep-th]].

[24] T. Nishioka and T. Takayanagi, "AdS Bubbles, Entropy and Closed String Tachyons", *JHEP* **0701** (2007) 090 [hep-th/0611035].

[25] J. Eisert, M. Cramer and M. B. Plenio, "Area laws for the entanglement entropy — a review", *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 277 [arXiv:0808.3773 [quant-ph]].

[26] J. I. Latorre, A. Riera, "A short review on entanglement in quantum spin systems", *J. Phys. A* **42** (2009) 504002 [arXiv:0906.1499 [hep-th]].

[27] D. N. Page, "Average entropy of a subsystem", *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1291 [gr-qc/9305007].

[28] N. Shiba and T. Takayanagi, "Volume Law for the Entanglement Entropy in Non-local QFTs", arXiv:1311.1643 [hep-th].
J. L. Karczmarek and P. Sabella-Garnier, "Entanglement entropy on the fuzzy sphere", arXiv:1310.8345 [hep-th].

[29] 量子ホール系で初めてこのようなスペクトラムを初めて計算した論文は，S. Ryu, Y. Hatsugai,"Entanglement entropy and the Berry phase in solid states", *Phys. Rev.* **B 73** (2006) 245115, [cond-mat/0601237].
このようなスペクトラムにエンタングルメント・スペクトラムという名前を与え，相互作用する量子ホール系で計算した論文は，H. Li and F. D. M.Haldane,"Entanglement Spectrum as a Generalization of Entanglement Entropy: Identification of Topological Order in Non-Abelian Fractional Quantum Hall Effect States", *Phys. Rev. Lett.* **101**(2008)010504, arXiv:0805.0332.

[30] 伊藤克司,「共形場理論」，サイエンス社，SGC ライブラリ 83，臨時別冊・数理科学 2011 年 6 月．

[31] P. Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, "*Conformal Field Theory*", Springer.

[32] J. Polchinski, "Scale And Conformal Invariance In Quantum Field Theory", *Nucl. Phys. B* **303** (1988) 226.

[33] Y. Nakayama, "A lecture note on scale invariance vs conformal invariance", arXiv:1302.0884 [hep-th].

[34] C. Holzhey, F. Larsen and F. Wilczek, "Geometric and renormalized entropy in conformal field theory", *Nucl. Phys. B* **424**, 443 (1994) [arXiv:hep-th/9403108].

[35] T. Azeyanagi, T. Nishioka and T. Takayanagi, "Near Extremal Black Hole Entropy as Entanglement Entropy via AdS(2)/CFT(1)", *Phys. Rev. D* **77** (2008) 064005 [arXiv:0710.2956 [hep-th]].

[36] S. Furukawa, V. Pasquier, J. Shiraishi, "Mutual Information and Boson Radius in c=1 Critical Systems in One Dimension", *Phys. Rev. Lett.* **102**, 170602 (2009),

[arXiv:0809.5113].

P. Calabrese, J. Cardy and E. Tonni, "Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory", *J. Stat. Mech.* **0911** (2009) P11001 [arXiv:0905.2069 [hep-th]].

[37] M. Headrick, "Entanglement Renyi entropies in holographic theories", *Phys. Rev. D* **82** (2010) 126010 [arXiv:1006.0047 [hep-th]].

[38] A. B. Zamolodchikov, "Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory", *JETP Lett.* **43** (1986) 730 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43** (1986) 565].

[39] H. Casini and M. Huerta, "A Finite entanglement entropy and the c-theorem", *Phys. Lett. B* **600** (2004) 142 [hep-th/0405111].

[40] H. Casini and M. Huerta, "Universal terms for the entanglement entropy in 2+1 dimensions", *Nucl. Phys. B* **764** (2007) 183 [hep-th/0606256].

[41] T. Hirata and T. Takayanagi, "AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy", *JHEP* **0702** (2007) 042 [hep-th/0608213].

[42] H. Casini and M. Huerta, "Entanglement and alpha entropies for a massive scalar field in two dimensions", *J. Stat. Mech.* **0512**(2005)12012 [cond-mat/0511014].

[43] D. V. Fursaev and S. N. Solodukhin, "On the description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects", *Phys. Rev. D* **52** (1995) 2133 [hep-th/9501127].

[44] J. L. Cardy, "Is There a c Theorem in Four-Dimensions?", *Phys. Lett. B* **215** (1988) 749.

[45] Z. Komargodski and A. Schwimmer, "On Renormalization Group Flows in Four Dimensions", *JHEP* **1112** (2011) 099 [arXiv:1107.3987 [hep-th]].

[46] S. N. Solodukhin, "Entanglement entropy, conformal invariance and extrinsic geometry", *Phys. Lett. B* **665** (2008) 305 [arXiv:0802.3117 [hep-th]].

[47] L. -Y. Hung, R. C. Myers and M. Smolkin, "On Holographic Entanglement Entropy and Higher Curvature Gravity", *JHEP* **1104** (2011) 025 [arXiv:1101.5813 [hep-th]].

[48] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, "Towards a derivation of holographic entanglement entropy", *JHEP* **1105** (2011) 036 [arXiv:1102.0440 [hep-th]].

[49] D. L. Jafferis, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, "Towards the F-Theorem: N=2 Field Theories on the Three-Sphere", *JHEP* **1106** (2011) 102 [arXiv:1103.1181 [hep-th]].

I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, "F-Theorem without Supersymmetry", *JHEP* **1110** (2011) 038 [arXiv:1105.4598 [hep-th]].

[50] H. Liu and M. Mezei, "A Refinement of entanglement entropy and the number of degrees of freedom", arXiv:1202.2070 [hep-th].

[51] H. Casini and M. Huerta, "On the RG running of the entanglement entropy of a circle", *Phys. Rev. D* **85** (2012) 125016 [arXiv:1202.5650 [hep-th]].

[52] I. R. Klebanov, T. Nishioka, S. S. Pufu and B. R. Safdi, "Is Renormalized Entanglement Entropy Stationary at RG Fixed Points?", *JHEP* **1210** (2012) 058 [arXiv:1207.3360 [hep-th]].

[53] B. Swingle and T. Senthil, "A geometric proof of the equality between entanglement and

edge spectra", *Phys. Rev.* **B86** (2012) 045117, [arXiv:1109.1283].

[54] P. Fendley, M. P. A. Fisher and C. Nayak, "Topological Entanglement Entropy from the Holographic Partition Function", *J. Stat. Mech.* **126** (2007) 1111, cond-mat/0609072.

[55] エントロピーバウンドの座標に依らない定式化は R. Bousso, *JHEP* **9907**, 004 (1999) [arXiv:hep-th/9905177].

[56] T. Jacobson, "Black hole entropy and induced gravity", gr-qc/9404039.

[57] 今村洋介,『超弦理論の基礎』, サイエンス社, SGC ライブラリ 80, 臨時別冊・数理科学 2011 年 1 月.

[58] 谷井義彰,『超重力理論』, サイエンス社, SGC ライブラリ 82, 臨時別冊・数理科学 2011 年 4 月.

[59] フェルミオンとボソンを入れ替える変換に関して対称である理論を超対称性理論と呼ぶ. 詳しくは, 以下の教科書など参照. 太田信義・坂井典佑,『超対称性理論』, サイエンス社, SGC ライブラリ 51, 臨時別冊・数理科学 2006 年 11 月.
英語で書かれた標準的な教科書は, J. Wess and J. Bagger, "*Supersymmetry and Supergravity*", Princeton Series in Physics, Princeton University Press.

[60] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].
E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].

[61] T. Takayanagi, "Holographic Dual of BCFT", *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 101602 [arXiv:1105.5165 [hep-th]].
M. Fujita, T. Takayanagi and E. Tonni, "Aspects of AdS/BCFT", *JHEP* **1111** (2011) 043 [arXiv:1108.5152 [hep-th]].

[62] I. R. Klebanov and E. Witten, "AdS / CFT correspondence and symmetry breaking", *Nucl. Phys. B* **556** (1999) 89 [hep-th/9905104].

[63] E. Witten, "Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505 [hep-th/9803131].

[64] A. Lewkowycz and J. Maldacena, "Generalized gravitational entropy", *JHEP* **1308** (2013) 090 [arXiv:1304.4926 [hep-th]].

[65] J. D. Brown and M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity", *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207.

[66] D. E. Berenstein, R. Corrado, W. Fischler and J. M. Maldacena, "The Operator product expansion for Wilson loops and surfaces in the large N limit", *Phys. Rev. D* **59** (1999) 105023 [hep-th/9809188].

[67] S. S. Gubser, "Einstein manifolds and conformal field theories", *Phys. Rev. D* **59** (1999) 025006 [hep-th/9807164].

[68] M. Headrick and T. Takayanagi, "A Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy", *Phys. Rev. D* **76** (2007) 106013 [arXiv:0704.3719 [hep-th]].

[69] P. Hayden, M. Headrick and A. Maloney, “Holographic Mutual Information is Monogamous”, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 4, 046003 [arXiv:1107.2940 [hep-th]].

[70] T. Barrella, X. Dong, S. A. Hartnoll and V. L. Martin, “Holographic entanglement beyond classical gravity”, arXiv:1306.4682 [hep-th].

[71] T. Faulkner, A. Lewkowycz and J. Maldacena, “Quantum corrections to holographic entanglement entropy”, arXiv:1307.2892 [hep-th].

[72] R. Emparan, “AdS / CFT duals of topological black holes and the entropy of zero energy states”, *JHEP* **9906** (1999) 036 [hep-th/9906040].

[73] L. -Y. Hung, R. C. Myers, M. Smolkin and A. Yale, “Holographic Calculations of Renyi Entropy”, *JHEP* **1112** (2011) 047 [arXiv:1110.1084 [hep-th]].

[74] D. V. Fursaev, “Proof of the holographic formula for entanglement entropy”, *JHEP* **0609** (2006) 018 [hep-th/0606184].

[75] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal”, *JHEP* **0707** (2007) 062 [arXiv:0705.0016 [hep-th]].

[76] 重力理論がヌル・エネルギー条件を満たせば，共変的なホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーに対して強劣加法性が成り立つことが以下の論文で確認されている：

A. C. Wall, “Maximin Surfaces, and the Strong Subadditivity of the Covariant Holographic Entanglement Entropy”, arXiv:1211.3494 [hep-th].

R. Callan, J. -Y. He and M. Headrick, “Strong subadditivity and the covariant holographic entanglement entropy formula”, *JHEP* **1206** (2012) 081 [arXiv:1204.2309 [hep-th]].

A. Allais and E. Tonni, “Holographic evolution of the mutual information”, *JHEP* **1201** (2012) 102 [arXiv:1110.1607 [hep-th]].

[77] J. de Boer, M. Kulaxizi and A. Parnachev, “Holographic Entanglement Entropy in Lovelock Gravities”, *JHEP* **1107** (2011) 109 [arXiv:1101.5781 [hep-th]].

[78] N. Shiba, “Entanglement Entropy of Two Spheres”, *JHEP* **1207** (2012) 100 [arXiv:1201.4865 [hep-th]].

[79] J. Cardy, “Some results on the mutual information of disjoint regions in higher dimensions”, *J. Phys. A* **46** (2013) 285402 [arXiv:1304.7985 [hep-th]].

[80] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional spacetime”, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [hep-th/9204099].

[81] J. M. Maldacena, “Eternal black holes in Anti-de-Sitter”, *JHEP* **0304** (2003) 021 [arXiv:hep-th/0106112].

平坦な時空におけるブラックホールの拡張された時空に対して，最初に Thermo field double の考えを対応させたのは以下の論文：

W. Israel, “Thermo field dynamics of black holes”, *Phys. Lett. A* **57** (1976) 107.

[82] P. M. Chesler and L. G. Yaffe, “Horizon formation and far-from-equilibrium isotropization in supersymmetric Yang-Mills plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 211601 (2009) [arXiv:0812.2053 [hep-th]]; “Boost invariant flow, black hole formation, and far-from-

equilibrium dynamics in N = 4 supersymmetric Yang-Mills theory", arXiv:0906.4426 [hep-th].

[83] S. Bhattacharyya and S. Minwalla, "Weak Field Black Hole Formation in Asymptotically AdS space-times", *JHEP* **0909** (2009) 034 [arXiv:0904.0464 [hep-th]].

[84] P. Calabrese and J. L. Cardy, "Evolution of Entanglement Entropy in One-Dimensional Systems", *J. Stat. Mech.* **0504** (2005) P010 [arXiv:cond-mat/0503393]; "Entanglement and correlation functions following a local quench: a conformal field theory approach", *J. Stat. Mech.* (2007) P010004 [arXiv:0708.3750]; "Quantum Quenches in Extended Systems", [arXiv:0704.1880 [cond-mat.stat-mech]].

[85] T. Takayanagi and T. Ugajin, "Measuring Black Hole Formations by Entanglement Entropy via Coarse-Graining", *JHEP* **1011** (2010) 054 [arXiv:1008.3439 [hep-th]].

[86] J. Abajo-Arrastia, J. Aparicio and E. Lopez, "Holographic Evolution of Entanglement Entropy", arXiv:1006.4090 [hep-th].

[87] T. Hartman and J. Maldacena, "Time Evolution of Entanglement Entropy from Black Hole Interiors", *JHEP* **1305** (2013) 014 [arXiv:1303.1080 [hep-th]].

[88] H. Liu and S. J. Suh, "Entanglement Tsunami: Universal Scaling in Holographic Thermalization", arXiv:1305.7244 [hep-th]; "Entanglement growth during thermalization in holographic systems", arXiv:1311.1200 [hep-th].

[89] J. Bhattacharya, M. Nozaki, T. Takayanagi and T. Ugajin, "Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States", *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 9, 091602 [arXiv:1212.1164].

[90] D. D. Blanco, H. Casini, L. -Y. Hung and R. C. Myers, "Relative Entropy and Holography", *JHEP* **1308** (2013) 060 [arXiv:1305.3182 [hep-th]].

[91] M. Nozaki, T. Numasawa and T. Takayanagi, "Holographic Local Quenches and Entanglement Density", *JHEP* **1305** (2013) 080 [arXiv:1302.5703 [hep-th]].

[92] P. Calabrese and J. L. Cardy, "Entanglement and correlation functions following a local quench: a conformal field theory approach", *J. Stat. Mech.* **10** (2007) P10004, arXiv:0708.3750.

[93] G. T. Horowitz and N. Itzhaki, "Black holes, shock waves, and causality in the AdS / CFT correspondence", *JHEP* **9902** (1999) 010 [hep-th/9901012].

[94] T. Ugajin, "Two dimensional quantum quenches and holography", arXiv:1311.2562 [hep-th].

[95] I. R. Klebanov, D. Kutasov and A. Murugan, "Entanglement as a probe of confinement", *Nucl. Phys. B* **796** (2008) 274 [arXiv:0709.2140 [hep-th]].

[96] Y. Nakagawa, A. Nakamura, S. Motoki and V. I. Zakharov, "Entanglement entropy of SU(3) Yang-Mills theory", *PoS LAT* **2009** (2009) 188 [arXiv:0911.2596 [hep-lat]].

[97] 藤本聡・川上則雄,『量子多体系の物理』, サイエンス社, SGC ライブラリ 87, 臨時別冊・数理科学 2011 年 12 月.

[98] 繰りこみ群を用いたフェルミ液体の場の理論的説明は，J. Polchinski, "Effective field theory and the Fermi surface", In *Boulder 1992, Proceedings, Recent directions in particle theory* 235–274, and Calif. Univ. Santa Barbara – NSF-ITP-92-132 (92,rec.Nov.) 39 p. (220633) Texas Univ. Austin – UTTG-92-20 (92,rec.Nov.) 39 p [hep-th/9210046]. にある.

[99] S. A. Hartnoll, "Lectures on holographic methods for condensed matter physics", *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224002 [arXiv:0903.3246 [hep-th]].

[100] J. McGreevy, "Holographic duality with a view toward many-body physics", *Adv. High Energy Phys.* **2010** (2010) 723105 [arXiv:0909.0518 [hep-th]].

[101] S. Sachdev, "The Quantum phases of matter", arXiv:1203.4565 [hep-th].

[102] 高柳匡，"物性物理とブラックホール熱力学"，数理科学 2011 月 10 月号 39 頁，サイエンス社.

[103] 夏梅誠,『超弦理論の応用』，サイエンス社，SGC ライブラリ 93，臨時別冊・数理科学 2012 年 9 月.

[104] N. Ogawa, T. Takayanagi and T. Ugajin, "Holographic Fermi Surfaces and Entanglement Entropy", *JHEP* **1201** (2012) 125 [arXiv:1111.1023 [hep-th]].

[105] M. M. Wolf, "Violation of the entropic area law for fermions", *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 010404 [quant-ph/0503219].

D. Gioev, I. Klich, "Entanglement entropy of fermions in any dimension and the Widom conjecture", *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 100503 [quant-ph/0504151].

[106] Y. Zhang, T. Grover, A. Vishwanath, "Entanglement entropy of critical spin liquids", *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 067202 [arXiv:1102.0350[cond-mat]].

[107] B. Swingle, L. Huijse and S. Sachdev, "Entanglement entropy of compressible holographic matter: loop corrections from bulk fermions", arXiv:1308.3234 [hep-th].

[108] C. Charmousis, B. Gouteraux, B. S. Kim, E. Kiritsis and R. Meyer, "Effective Holographic Theories for low-temperature condensed matter systems", *JHEP* **1011** (2010) 151 [arXiv:1005.4690 [hep-th]].

[109] L. Huijse, S. Sachdev, B. Swingle, " Hidden Fermi surfaces in compressible states of gauge-gravity duality", *Phys. Rev.* **B85** (2012) 035121 [arXiv:1112.0573].

[110] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, "Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points", *Phys. Rev. D* **78** (2008) 106005 [arXiv:0808.1725 [hep-th]].

[111] 松枝宏明，"エンタングルメントで見る時空の幾何学構造とテンソル積波動関数"，物性研究 (2011)，96(4):383–482.

[112] J. I. Cirac, F. Verstraete,"Renormalization and tensor product states in spin chains and lattices", *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 504004 [arXiv:0910.1130].

[113] G. Vidal, "Entanglement Renormalization", *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 22, 220405 [cond-mat/0512165]; "Entanglement renormalization: an introduction",arXiv:0912.1651.

[114] B. Swingle, "Entanglement Renormalization and Holography", *Phys. Rev. D* **86** (2012) 065007 [arXiv:0905.1317 [cond-mat.str-el]].

[115] J. Haegeman, T. J. Osborne, H. Verschelde and F. Verstraete, "Entanglement Renor-

malization for Quantum Fields in Real Space", *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 10, 100402 [arXiv:1102.5524 [hep-th]].

[116] M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic Geometry of Entanglement Renormalization in Quantum Field Theories", *JHEP* **1210** (2012) 193 [arXiv:1208.3469 [hep-th]].

A. Mollabashi, M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic Geometry of cMERA for Quantum Quenches and Finite Temperature", arXiv:1311.6095 [hep-th].

索　　引

マ

ヤ

ラ

ワ

著 者 略 歴

高柳 匡
たかやなぎ ただし

2002 年 東京大学大学院理学系研究科博士課程修了，理学博士
2002 年 ハーバード大学ジェファーソン研究所研究員
2005 年 カリフォルニア大学サンタバーバラ校カブリ理論物理学研究所研究員
2006 年 京都大学大学院理学研究科助手
2008 年 東京大学数物連携宇宙研究機構特任准教授
2011 年 第 4 回湯川記念財団・木村利栄理論物理学賞受賞
2013 年 第 28 回西宮湯川記念賞受賞
現 在 京都大学基礎物理学研究所教授
専 門 超弦理論，場の理論，量子重力

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-106

『ホログラフィー原理と量子エンタングルメント』

著 者 高柳 匡

2014 年 4 月 25 日 初版発行

数 理 科 学 編 集 部 発行人 木 下 敏 孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで. 表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社 TEL.(03)5474-8500(代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387 (03)5474-8600(広告部)

組版 クォンタ
印刷 (株) シナノ 中澤 眞
製本 (株) 関川製本所 関川安博